Ett exempel på att summor av normalfördelade variabler ej behöver vara normalfördelade trots att de är okorrelerade

Här är ett exempel på att summan av okorrelerade normalfördelade variabler ej behöver vara normalfördelad.

Låt X vara $N(0,1)$ samt låt vidare U ha fördelningen $P(U=1)=P(U=-1)=1/2$ samt vara oberoende av X.

Vi låter nu $Y = U \cdot |X|$ vilket alltså betyder att ”vi tar bort tecknet på X” och sen (oberoende) lottar om ett nytt tecken.

Man ser lätt att Y också är $N(0,1)$ beroende på symmetrin i $N(0,1)$-fördelningen. Alltså är både X och Y normalfördelade men däremot är ej $X+Y$ normalfördelad. T ex är P(X+Y=0)=1/2 ty $\{X+Y=0\} = \{U = -X/|X|\}$.

Detta trots att faktiskt X och Y är okorrelerade. Detta inses genom följande kalkyl:

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(U \cdot X \cdot |X|) - 0 \cdot 0 = E(U)E(X \cdot |X|) = 0 \cdot E(X \cdot |X|) = 0$$

där vi utnyttjat att U är oberoende av X (och därigenom också av $X|X|$).

I verkligheten har $X+Y$ en s k blandad fördelning (Kapitel 3.9 i Blom).