# Att använda mynt för godtyckliga odds

Jan Enger
Matematisk statistik
KTH

Vt 2006

Ett mynt som vid kast har sannolikheten för klave upp lika med en halv, används ibland för att åstadkomma 50 %-chanser. Vill man istället åstadkomma en händelse med sannolikhet 1/4 kan man till exempel kasta två gånger och låta $A$ inträffar om två klave i rad erhålls. Men om man vill åstadkomma en händelse med sannolikheten 1/3 eller lika med decimalbråksutvecklingen av $\pi$ hur skall man då göra?

## Så används myntet

Det visar sig att det är förvånandsvärt enkelt att använda myntet, och dessutom går det lika snabbt oavsett vilken sannolikhet $p$ man än vill åstadkomma. Det enda man använder myntet till är att kasta det tills klave erhålls! Eftersom antalet kast tills klave fås är för första gången fördelat, ffg($\frac{1}{2}$), är det förväntade antalet kast lika med 2.

Vi skall nu konstruera själva händelsen. Normalt tänker vi oss tal decimalbråksutvecklade, dvs säga utvecklade i basen 10; $p = 0.a_1a_2a_3\ldots$, innebär att

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k} \text{ där } 0 \leq a_k \leq 9.$$

Nu gör vi stället en dyadisk utveckling, dvs använder bas 2, vilket innebär att

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k} \text{ där } d_k \text{ 0 eller 1.}$$

Exempelvis är $\pi - 3 = 0.001001000011111101101 0\ldots$ i dyadisk utveckling.

Låt $N$ vara den kastomgång då klave erhölls för första gången. Då är som sagt $N \in \text{ffg}(\frac{1}{2})$ och således är $P(N = k) = (1 - \frac{1}{2})^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k$.

Låt nu $A$ vara händelsen $\{d_N = 1\}$, dvs att det i den dyadiska utvecklingen av $p$ står en etta i den position som motsvarar kastomgången för första klave. Om $p = 0.0010010000111111011010\ldots$ inträffar således $A$ om klave för första gången erhålls i kastomgång 3, 6, 11 osv, men inte om klave erhölls för första gången vid kast 1, 2, 4, 5 osv. Vi skall visa att $P(A) = p$.

Lagen om total sannolikhet ger

$$P(A) = P(d_N = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(d_N = 1 | N = k) P(N = k) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(d_k = 1) P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (\frac{1}{2})^k = p$$

eftersom $P(N = k) = (\frac{1}{2})^k$ och, trivialt, $P(d_k = 1) = P(1 = 1) = 1$ om $d_k = 1$ och $P(d_k = 1) = P(0 = 1) = 0$ om $d_k = 0$, dvs $P(d_k = 1) = d_k$. Därmed har vi visat att $A$ har sannolikheten $p$.

## Finns det bättre sätt?

Om den dyadiska utvecklingen är ändlig ($d_k = 0$ för $k \geq k_0$ för något $k_0$), behöver man inte alltid vänta på att klave skall erhållas. Om t.ex. $p = 1/2$ och krona erhålls redan vid första kastet, behöver man inte kasta mer. Alla $d_k = 0$ för $k > 1$ är ju 0 och man vet således att $d_N = 0$, dvs att $A$ inte kommer att inträffa. Detta gäller alla tal vars dyadiska utveckling är ändlig; man behöver inte kasta fler kast än vad som anges av den position där sista ettan finns i utvecklingen. Det betyder att vi kan modifiera vårt förfarande något:

**Standardprocedur:** *Kasta myntet tills man kan avgöra om första klave kommer vid en kastomgång som motsvarar en etta i den dyadiska utvecklingen. Händelsen $A$ definieras som tidigare.*

För en oändlig dyadisk utveckling är detta ekvivalent med det först beskrivna. Vi skall visa att detta förfarande är det effektivast tänkbara. Först en definition.

**Definition:** *En stokastisk variabel $X$ är stokastiskt mindre eller lika med $Y$, $X \leq^{st} Y$ om*

$$P(X > x) \leq P(Y > x) \text{ för alla } x.$$

I ord: sannolikheten att $X$ är större än ett godtyckligt tal är högst lika stor som sannolikheten att $Y$ är större än detta tal. Vill man formulera det med fördelningsfunktioner istället innebär $X \leq^{st} Y$ att $F_Y(x) \leq F_X(x)$ för alla $x$. För heltalsvariabler räcker det att betrakta heltal $x$.

Sätt $X$ lika med antalet kast som krävs enligt standardproceduren och $Y$ antalet kast som krävs efter någon annan procedur som ger sannolikheten $p$ för en konstruerad händelse. Vi skall visa att

$$X \leq^{st} Y. \tag{1}$$

Det innebär att standardproceduren vi beskrivit har stokastiskt lägsta möjliga antal kastomgångar, den är effektivast. Om $p$ inte har ändlig dyadisk utveckling är $P(X > k) = (\frac{1}{2})^k$ (sannolikhet $k$ första kasten ger krona). Om $p$ har ändlig dyadisk utveckling är sannolikheten densamma om $k < n$, där $n$ är positionen för sista ettan i utvecklingen, medan $P(X > k) = 0$ för $k \geq n$.

**Bevis av** (1): Om (1) inte är sann existerar ett heltal $k$ sådant att

$$P(Y > k) < P(X > k) \tag{2}$$

Sannolikheten $P(X > k)$ är antingen $(\frac{1}{2})^k$ eller 0. Det sista fallet är omöjligt om (2) skall gälla, varför

$$P(Y > k) < (\frac{1}{2})^k. \tag{3}$$

Om $p$ har en ändlig dyadisk utvecklingen är $P(X > n) = 0$ om $n$ anger sista 1-positionen och således är $k < n$ i detta fall.

Händelsen $\{Y > k\}$ är bestämd av vad som händer i de $k$ första kasten och vad som händer i de $k$ första kasten beskrivs av mängden $E_k$ av alla $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ där $e_i$ är klave eller krona i det $i$:e kastet. Händelsen $\{Y > k\}$ är en delmängd av $E_k$. Varje elementarhändelse $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ har sannolikhet $(\frac{1}{2})^k$ och därmed har händelsen $\{Y > k\}$ sannolikhet $a \cdot (\frac{1}{2})^k$ för något heltal $a$. Om nu (3) skall gälla måste $a = 0$ och därför är $P(Y \leq k) = 1$. Man kan alltså med sannolikhet 1 inom $k$ kast avgöra om $A$ har inträffat, dvs händelsen måste vara en delmängd av $E_k$. Men alla händelser i $E_k$ har sannolikhet $a \cdot (\frac{1}{2})^k$ för något heltal $a$. Alla sannolikheter för händelser i $E_k$ kan således i dyadisk utveckling skrivas

$$\sum_{i=1}^{k} b_i (\frac{1}{2})^i \tag{4}$$

där $b_i$ är 0 eller 1. Men vi har $p = \sum_{i=1}^{\infty} d_i (\frac{1}{2})^i$ där $d_i = 1$ för något $i > k$ och $p$ kan inte skrivas i formen (4) eftersom dyadutvecklingen är entydig och åtminstone en term fattas. Detta ger en motsägelse och (1) är visad. □

Av beviset framgår också att det inte finns en deterministisk övre gräns för antalet kast som krävs om den dyadiska utvecklingen av $p$ inte är ändlig. Detta gäller till exempel om $p = 1/3$.

ANM. Man kan erhålla den dyadiska utvecklingen av $p$ på följande sätt:
Om $p = \sum_i d_i 2^{-i}$ ser man att multiplikation med $2^k$ ger

$$2^k \cdot p = 2 \sum_{i=1}^{k-1} d_i 2^{k-1-i} + d_k + \sum_{i=k+1} d_i 2^{k-i}$$

Heltalsdelen är $2 \sum_{i=1}^{k-1} d_i 2^{k-i-1} + d_k$ som är jämnt om $d_k = 0$ och udda om $d_k = 1$, dvs $d_i$ är resten av heltalet vid division med två, eller annorlunda skrivet är $d_k = [2^k \cdot p] \mod (2)$ ($[x]$ anger heltalsdelen av $x$). Följande kommande i MATLAB ger vektor med de 50 första dyadtalen $d_k$ av $p$:

```
k=1:50;
d=mod(floor(2.^k*p),2)
```