



## Övningsuppgifter på derivator för sf1627, matematik för ekonomer (rev. 1)

### Produktregeln: derivera

1.  $\frac{1}{x^2}e^x$
2.  $\sqrt{x}\ln(x)$
3.  $x^2e^x\ln(x)$
4.  $x^3\ln(x)$
5.  $x^3(\ln x)^2$
6.  $(x-1)e^x$

### Kvotregeln: derivera

1.  $\frac{\ln x}{x}$
2.  $\frac{x}{\ln x}$
3.  $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
4.  $\frac{xe^x}{1+x^2}$
5.  $\frac{1+x^2}{xe^x}$

### Kedjeregeln: derivera

1.  $e^{\sqrt{x}}$
2.  $e^{-1/x}$
3.  $x\ln(1+x^2)$
4.  $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
5.  $\ln\left(2+e^{3x^2}\right)$
6.  $\frac{K}{x}\left(1-\frac{1}{(1+x)^n}\right)$

### ”Logaritmisk derivering”:

1. Bestäm uttrycket för durationen för en n-årig annuitet.

derivera:

2.  $x^{\sqrt{x}}$
3.  $x^{1/x}$
4.  $x^{(e^x)}$

### Andra ordningens derivator: bestäm andraderivatan till

1.  $e^{-3x}$
2.  $2e^{x^3}$
3.  $e^{1/x}$

Bestäm den kvadratiske approximationen till funktionen i närheten av den givna punkten:

4.  $(1+x)^5, \quad x=0$
5.  $\ln(1+x), \quad x=0$
6.  $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n, \quad r=0$
7.  $\sqrt[3]{1+x}, \quad x=0$
8.  $2+3x-4x^2$
9.  $e^{-x^2/2}, \quad x=0$

### Växande, avtagande: Avgör i vilka intervall funktionen är växande respektive avtagande:

1.  $x^2-4x+3$
2.  $-x^3+4x^2-x-6$
3.  $x^3+e^{2x}$
4.  $5x^2e^{-4x}$
5.  $x^2e^{-x^2}$
6.  $e^x-e^{3x}$

### Konvexitet, konkavitet: Avgör om funktionen är konvex eller konkav:

1.  $e^x$
2.  $e^{-x}$
3.  $\ln(1+x)$
4.  $\sqrt{x}$

5. I vilka intervall är funktionen  $\ln(1+x^2)$  konvex respektive konkav?

## Svar:

**Produktregeln:** 1.  $\left(\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{x^2}\right)e^x$  2.  $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$  3.  $2xe^x \ln x + x^2 e^x \ln x + xe^x$

4.  $3x^2 \ln x + x^2$  5.  $3x^2(\ln x)^2 + 2x^2 \ln x$  6.  $xe^x$

**Kvotregeln:** 1.  $\frac{1-\ln x}{x^2}$  2.  $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$  3.  $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$  4.  $\frac{e^x(x^3 - x^2 + x + 1)}{(1+x^2)^2}$

5.  $\frac{x^2 - x^3 - x - 1}{x^2 e^x}$  **Kedjeregeln:** 1.  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$  2.  $\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$  3.  $\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$

4.  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  5.  $\frac{6xe^{3x^2}}{2+e^{3x^2}}$  6.  $-\frac{K}{x^2}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right) + \frac{K}{x} \frac{n}{(1+x)^{n+1}}$

**”Logaritmisk derivering”:** 1.  $\frac{1}{r} - \frac{n}{(1+r)((1+r)^n - 1)}$  2.  $\frac{x^{\sqrt{x}}(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$

3.  $x^{1/x-2}(1-\ln x)$  4.  $x^{(e^x)}e^{x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)}$  **Andra ordningens derivator:** 1.  $9e^{-3x}$

2.  $e^{x^3}(18x^4 + 12x)$  3.  $e^{1/x}\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$  4.  $1+5x+10x^2$  5.  $x - \frac{1}{2}x^2$

6.  $1+r + \frac{n-1}{2n}r^2$  7.  $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$  8.  $2+3x-4x^2$  9.  $1 - \frac{1}{2}x^2$

**Växande, avtagande:** Se läroboken problem 6.3:1, 6.3:2, 6.10:4a, b, c, 6.10:5b.

**Konvexitet, konkavitet:** 1. konvex 2. konvex 3. konkav 4. konkav  
5. konvex för  $-1 < x < 1$ , konkav för  $x < -1$  och  $x > 1$ .



KTH Teknikvetenskap

## Repetitionsuppgifter för sf1627, matematik för ekonomer (rev. 0)

- 1a. Beräkna summan  $\sum_{k=1}^n ka^{k-1}$ . *Ledning:* ansätt  $ka^{k-1} = b_k - b_{k-1}$  där  $b_k = (xk + y)a^k$  och bestäm  $x$  och  $y$ .
- 1b. Om  $0 < a < 1$ , vad blir då  $\sum_{k=1}^{\infty} ka^{k-1}$ ?
2. Beräkna  $\int_0^n xe^{-ax} dx$ . *Ledning:* ansätt  $xe^{-ax} = \frac{d}{dx}(bx + c)e^{-ax}$ , och bestäm konstanterna  $b$  och  $c$ . Observera likheten med uppgift 1!
3. Vi lånar  $K$  kronor idag och amorterar med  $a(1+\delta)^{k-1}$  kronor om  $k$  år,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Om räntan är  $r$  per år, hur lång tid tar det innan lånet är amorterat? Antag först att  $d \neq r$ , och behandla sedan fallet  $d = r$  separat. *Ledning:* Lånet är återbetalat då nuvärdet av amorteringarna är lika med lånets storlek.
4. Samma fråga som i 3, men vi har kontinuerlig förräntning  $r$  och betalar kontinuerlig amortering  $a(t) = ae^{\delta \cdot t}$  per tidsenhet.
5. Efterfrågan för kaffe är  $Q(p) = Q_0 e^{-0.005p}$  [påhittat av mig] där  $p$  är priset per kilo. Totala kostnaden för kaffet då priset är  $p = 50$  kr/kilo är alltså  $K = 50 \cdot Q_0 e^{-0.25}$  kronor. Antag att priset  $p$  sänks från 50 till 45 kronor per kilo. Bestäm ökningen av konsumentöverskottet, som andel av  $K$ . Var resultatet ungefär det du förväntat dig?
6. Bestäm priselasticiteten för efterfrågan på kaffe (se uppgift 5) vid priset  $p = 50$  kronor /kilo. Beräkna med den approximativa formeln med elasticitet den procentuella ökningen i efterfrågan då priset minskar från 50 till 45 kronor per kilo, och jämför med det exakta värdet.
7. Derivera funktionen  $x^{2x}$ .
8. Vi har en cylindrisk tank med vatten i. I botten finns en tapp, och när den dras ur rinner vattnet ut med hastigheten  $\sqrt{x}$  liter per sekund, där  $x$  är vattennivåns höjd i cylindern. Om vattennivåns höjd från början är  $h$ , beräkna den tid det tar för allt vatten att rinna ut. Vi antar att cylinderns innerdiameter är 1.
9. Funktionen  $y = y(x)$  definieras genom sambandet  $x^3 + x^2 y + y^3 + y = 2$ . Verifiera att  $y(0) = 1$ . Bestäm en approximation av  $y(x)$  i närheten av  $x = 0$  som ett polynom av andra graden.

- Svar:** 1a.  $\frac{1-a^n(n+1-an)}{(1-a)^2}$       1b.  $\frac{1}{(1-a)^2}$       2.  $\frac{1-e^{-an}(1+an)}{a^2}$
3.  $\frac{\ln(a+K(\delta-r))-\ln a}{\ln(1+\delta)-\ln(1+r)}$       4.  $\frac{\ln(a+K(\delta-r))-\ln a}{\delta-r}$       5. 10.126% ; Ja!
6.  $El = -0.25$ , enligt approximativa formeln skulle ökningen i efterfrågan vara 2.5%, exakta värdet är  $\approx 2.53\%$ .
7.  $2x^{2x}(1+\ln x)$       8.  $\frac{\pi}{2}\sqrt{h}$       9.  $y(x) \approx 1 - \frac{1}{4}x^2$



KTH Teknikvetenskap

### Några övningar på kalitel 12 och 13.

1.  $z = z(x, y)$  bestäms genom sambandet  $4x^3 + 3ye^{3xy} - 2ze^{2z} = 4$ , där  $z(1, 2) = 3$ . Bestäm derivatorna  $z'_x(1, 2)$  och  $z'_y(1, 2)$ .
2.  $z = z(x, y)$  bestäms genom sambandet  $x^2 + y^2 + z + z^3 = 4$ . Bestäm uttrycken för  $z''_{xx}, z''_{xy}$  och  $z''_{yy}$  (uttryckta i  $x, y$  och  $z$ ).
3. Bestäm marginella substitutionskvoten  $R_{yu}$  då  $Q(x, y, u) = (x^\alpha + y^\beta + u^\gamma)^\delta$ .
4. Bestäm största värdet för funktionen  $4 - 10x^2 + 24xy + 8x - 16y^2$ .
5. Bestäm minsta värdet för funktionen  $5x^2 - 4xy + 10x + y^2 - 6y + 10$ .

### Svar:

1.  $z'_x = \frac{1}{7}(18 + 6e^{-6})$ ,  $z'_y = \frac{3}{2}$
2.  $z''_{xx} = -\frac{2}{3z^2 + 1} - \frac{24x^2z}{(3z^2 + 1)^3}$ ,  $z''_{xy} = -\frac{24xyz}{(3z^2 + 1)^3}$ ,  $z''_{yy} = -\frac{2}{3z^2 + 1} - \frac{24y^2z}{(3z^2 + 1)^3}$
3.  $R_{yu} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{u^{\gamma-1}}{y^{\beta-1}}$
4. 20. Antas för  $x = 4, y = 3$ .
5. 0. Antas för  $x = 1, y = 5$ .



KTH Teknikvetenskap

## Övningar på Lagranges Multiplikatormetod för sf1627

1. Bestäm största och minsta värdet av  $x + 2y$  under bivillkoret  $x^2 + y^2 = 1$

2. Ett företag har produktionsfunktionen  $F(K, L)$ , där  $K$  och  $L$  är ”insatsvarorna” kapital och arbetskraft. Priserna på ”insatsvarorna” är  $r$  respektive  $w$ . Företaget minimerar sin kostnad för en given produktion  $Q = F(K, L)$ . Visa att marginella substitutionskvoten

$$\frac{F'_K}{F'_L} = \frac{r}{w}$$

3. En konsument har nyttofunktionen  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  då han konsumerar kvantiteterna  $x$  respektive  $y$  av två varor. Priserna på de två varorna är  $p$  respektive  $q$ , och totalt spenderar han beloppet  $m$  på de två varorna.

Bestäm de optimala kvantiteterna  $x^*$  och  $y^*$ . Bestäm också marginalnyttan av inkomst, uttryckt i  $p$ ,  $q$ , och  $m$ . Hur påverkas marginalnyttan av inkomst om bägger priserna och  $m$  fördubblas?

4. Bestäm största värdet av  $x^2 y^2$  under bivillkoret  $x^2 + 2y^2 = 1$ . Vad är minsta värdet? kan du se det utan att göra några kalkyler?
5. En konsument har nyttofunktionen  $u(x, y) + z$  vid konsumtionerna  $x, y, z$  av tre varor. Han maximerar sin nytta och spenderar totalt beloppet  $m$  på de tre varorna, vars priser är  $p, q, r$ , respektive. Visa att de optimala värdena på  $x$  och  $y$  inte beror på  $m$ . Visa att marginalnyttan av inkomst inte heller beror på  $m$ .
6. Under förutsättningarna i problem 5: visa Slutsky-symmetrierna för de inversa efterfrågefunktionerna för  $x$  och  $y$ :  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$

### SVAR på några av problemen

1. Största värdet är  $\sqrt{5}$  och antas för  $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ , minsta värdet är  $-\sqrt{5}$  och antas för  $x = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ ,  $y = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ .
3.  $x^* = \frac{mq}{pq + p^2}$ ,  $y^* = \frac{mp}{pq + q^2}$  marginalnyttan  $= \frac{\sqrt{p+q}}{2\sqrt{mpq}}$
4.  $\frac{1}{8}$ . Minsta värdet är uppenbarligen (?) 0.



KTH Teknikvetenskap

## Övningar i att förenkla uttryck (formel-manipulation) för sf1627

Förenkla följande uttryck så långt det går:

1.  $\frac{13}{\sqrt{13}}$     2.  $\frac{\sqrt{45} + \sqrt{20}}{\sqrt{5}}$     3.  $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{3}}{\sqrt{27}}$     4.  $(3^2 + 4^2)^{1/2}$     5.  $\frac{\sqrt{10}}{3 + \sqrt{10}} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
6.  $e^{\ln 2} \cdot \ln e^3$     7.  $\frac{2^{3x}}{4^x 2^x}$     8.  $\ln 18 - \ln 2 - 2 \ln 3$     9.  $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$     10.  $x^{\ln x} - e^{(\ln x)^2}$

---

Svar:    1.  $\sqrt{13}$     2. 5    3. 1    4. 5    5. 1    6. 6    7. 1    8. 0    9. 4    10. 0

---

### Blandade övningar för sf1627

1. Beräkna integralen  $\int_0^\infty e^{-3x} dx$
2. Efterfrågan på en vara ges av  $q^d = 4 - p$  och utbudet  $q^s = 4p - 8.5$   
a) Bestäm pris och kvantitet vid jämvikt (utbud=efterfrågan).  
b) Beräkna välfärdsöverskottet vid jämvikt.  
c) Antag att prodecenten har monopol, och sätter priset till  $p = 3$ . vad blir "Dead Weight Loss"? (Dvs. hur mycket minskar välfärden jämfört med jämviktsläget.)
3. **Svårare fråga för "hackers"!** I fråga 3, vilket pris väljer en vinstmaximerande monopolist?
4. Funktionen  $y = y(x)$  är definierad via sambandet  $y + e^y = x^3 + x + 1$ , och  $y(0) = 0$ . Bestäm den kvadratiske approximationen till  $y(x)$  då  $x \approx 0$  (dvs. bestäm det polynom av andra graden som approximerar  $y(x)$  då  $x \approx 0$ .)
5. a) Bestäm det intervall där  $y = x^2 e^{-x}$  är konkav.  
b) Bestäm funktionens största värde i detta intervall.

---

Svar 1.  $\frac{1}{3}$     2a.  $p = 2.5$ ,  $q = 1.5$     b)  $W = 45/32$     c)  $5/32$     3.  $3\frac{1}{6}$     4.  $y(x) \approx \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2$

5a. Konkav i intervallet.  $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$

b) Största värdet är  $4e^{-2}$  som antas för  $x = 2$ .



KTH Teknikvetenskap

## Fler övningar för sf1627

**Förenkla följande uttryck:**

1.  $\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4.5}$     2.  $\frac{\sqrt{18}\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$     3.  $\log_3 27$     4.  $\frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(e)}$     5.  $\frac{\ln x}{\log_{10}(x)}$ .

**Lös följande problem:**

6. En statsobligation ger 2'000 kronor i kupongutdelning efter ett halvår, efter ett år och efter ett och ett halvt år. Den inlöses sedan till 102'000 kronor efter två år. Räntan  $r$  är två procent per halvår. **a)** Beräkna nuvärdet av denna obligation. **b)** Beräkna durationen av denna obligation (durationen är  $-\frac{PV'(r)}{PV}$  för det aktuella värdet på  $r$ ) uttryckt i år!
7. Ett kassaflöde ger  $a(1+d)^k$  efter  $k$  år,  $k = 5, 6, \dots, 50$ . Räntan är  $r$  per år. Bestäm nuvärdet av detta kassaflöde. Vi kan anta att  $r > d$ .
8. Funktionen  $z = z(x, y)$  ges av  $xz^3 + 2xy^2 + x^2z = 4$ , och  $z(1,1) = 1$ . Bestäm ett närmevärde till  $z(1.05, 0.96)$ .

**svar:** 1. 0    2. 2    3. 3    4.  $\ln x$     5.  $\ln(10)$     6. 1.904 år

7.  $a \frac{1+d}{r-d} \left( \left( \frac{1+d}{1+r} \right)^4 - \left( \frac{1+d}{1+r} \right)^{50} \right)$     8.  $0.9775 \approx 0.98$