Födelsedagsproblemet

(eller "utan hänsyn till ordning" vs "med hänsyn till ordning")

I) Utan hänsyn till ordning:

Antag att vi ville räkna möjliga kombinationer av n olika objekt (t.ex. födelsedagar) från N (t.ex. 365), givet att alla N objekt är lika sannolika, utan hänsyn till ordning.

Antal möjliga kombinationer är

$$\binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)(N+n-2)\cdots(N+n-(n-1))(N+1)\cdots 1}{(N-1)!\,n!}$$

$$= \frac{(N+n-1)(N+n-2)\cdots N}{n!}$$

Antal sätt att välja n distinkta objekt ges av

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}$$

Varför väljer vi då inte att räkna på detta sättet?

För att alla möjliga utfall inte är lika sannolika om vi inte tar hänsyn till ordning!

Låt oss ta ett exempel: $n = \cancel{3}\, 2$, $N = 3$; tänk att året bestod endast av Jan 1, 2, 3 (dvs, möjliga födelsedagar).

Möjliga kombinationer (med hänsyn till ordning):

$\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,1\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,3\}$; $3^2 = 9$ st.

Alla med slh $\frac{1}{9}$.

Utan hänsyn till ordning är de möjliga utfallen

{1 och 1}, {1 och 2}, {1 och 3}; {2 och 2}, {2 och 3}; {3 och 3}.

I II II I II I

Men dessa ser vi inte som lika sannolika!

Snarare skulle de ha slh $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$ (resp.)

Dvs händelser med två olika födelsedagar har dubbelt så stor sannolikhet som händelser där födelsedagarna överensstämmer ($\frac{2}{9}$ vs. $\frac{1}{9}$).

"<u>Problem</u>": Varje händelse i det "oordnade" utfallsrummet svarar mot <u>ett eller flera</u> händelser i det ordnade utfallsrummet. Hur många skiljer sig för de olika händelserna i det oordnade utfallsrummet.

Vi har alltså inte längre ett likformigt slh-mått när vi väljer att betrakta det oordnade fallet.

Vi kan enkelt se vad som händer i det specifika exemplet med $n=2$, $N=3$.

För det ordnade fallet vet vi att kvoten är

$$\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \frac{3\cdot 2}{3^2} = \frac{2}{3}$$

(dvs för att något "föremål" väljs två gånger); vi bortser från 3 av 9 händelser: $\{1,1\}$, $\{2,2\}$ och $\{3,3\}$.

<u>Oordnade fallet</u>: kvoten ges av

$$\frac{\dfrac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}}{\dfrac{(N+n-1)\cdots N}{n!}} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{(N+n-1)\cdots N}$$

Med $N=3$, $n=2$:

$$\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

Vi bortser mycket riktigt från sitt händelser: $\{1 \text{ och } 1\}$, $\{2 \text{ och } 2\}$ $\{3 \text{ och } 3\}$, men dessa utgör nu 3 av 6 möjliga (händelser) utfall som, om vi vill använda den klassiska definitionen, ses som lika sannolika (slh $1/6$ var).