# SF1901: Övningshäfte

5 september 2013

Uppgifterna under rubriken *Övning* kommer att gås igenom under övningstillfällena. Uppgifterna under rubriken *Hemtal* är starkt rekommenderade och motsvarar nivån på tentamen. Om de uppgifterna upplevs som för svåra finns det enklare uppgifter i kursboken. De ligger sist på varje övning under rubriken *Blom*.

## 1 Övning 1

**Uppgift 1.1** *Låt $A$ och $B$ vara två händelser. Uttryck följande händelser i ord och rita in dem i ett Venn-diagram.*

*a)* $A \cap B$,

*b)* $A \cap B^\star$,

*c)* $A^\star \cap B^\star$,

*d) Använd Venn-diagram för att bevisa additionsformeln*

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

*e) Rita Venn-diagram för att illustrera De Morgan's lagar*

$$(A \cup B)^\star = A^\star \cap B^\star,$$
$$(A \cap B)^\star = A^\star \cup B^\star.$$

**Uppgift 1.2** *Vid tillverkning av en viss typ av byggelement kan två slags fel $A$ och $B$ föreligga hos de tillverkade enheterna. Man vet att $\mathrm{P}(A) = 0.1$, $\mathrm{P}(B) = 0.2$ och $P(A \cap B) = 0.05$. Beräkna sannolikheten att en tillverkad enhet har*

*a) åtminstone något av felen,*

*b) felet $A$ men inte felet $B$,*

*c) inget av felen,*

*d) exakt ett av felen $A$ och $B$.*

**Uppgift 1.3** *Tag slumpmässigt utan återläggning tre kort ur en kortlek med 52 kort. Beräkna med hjälp av den klassiska sannolikhetsdefinitionen sannolikheten att*

*a) alla tre är hjärter*

*b) inget är hjärter*

*c) alla tre är ess.*

**Uppgift 1.4** *Beräkna sannolikheten att man vid dragning av fem kort ur en kortlek med 52 kort erhåller:*

*a) ess, kung, dam, knekt, tio i samma färg (Royal flush),*

*b) fem kort i följd i samma färg (Straight flush eller Royal flush),*

*c) fem kort i samma färg (Flush, Straight flush eller Royal flush).*

**Uppgift 1.5** *(Svår) Bestäm sannolikheten för att av 23 personer minst två har födelsedag på samma dag. Antag att året har 365 dagar och att alla födelsedagskombinationer är lika sannolika.*

## 1.1 Hemtal 1

Blom: 2.21, 2.7, 2.5, 2.16, 2.10

# 2 Övning 2: Betingade sannolikheter, oberoende händelser

**Uppgift 2.1** *Händelserna A och B är oberoende med* $\mathrm{P}(A) = 0.1$ *och* $\mathrm{P}(B) = 0.05$. *Beräkna* $\mathrm{P}(A^\star \cap B^\star)$. *Vad kan vi säga om händelserna* $A^\star$ *och* $B^\star$*?*

**Uppgift 2.2** *Två händelser A och B har sannolikheter skilda från noll.*

*a) A och B är disjunkta. Kan A och B vara oberoende?*

*b) A och B är oberoende. Kan A och B vara disjunkta?*

**Uppgift 2.3** *För händelserna A och B gäller* $\mathrm{P}(A) = 0.5$, $\mathrm{P}(B) = 0.4$ *och* $\mathrm{P}(A \cup B) = 0.8$. *Undersök om A och B är oberoende händelser.*

**Uppgift 2.4** *I ett lotteri finns tre lotter kvar varav precis en är en vinstlott. Personerna A, B och C ska i ordning dra varsin lott.*

*a) Bestäm sannolikheten för att A får vinstlotten.*

*b) Bestäm sannolikheten för att B får den.*

*c) Bestäm sannolikheten för att C får den.*

*Är det någon för-/nackdel att välja sist?*

**Uppgift 2.5** *Från en skylt med texten MALMÖ faller det ner två slumpmässigt valda bokstäver. En vänlig analfabet sätter upp de båda bokstäverna på de tomma platserna. Beräkna sannolikheten att skylten får korrekt text.*

**Uppgift 2.6** *Antag att sannolikheten för pojkfödsel är p och att könen hos olika barn i en familj är oberoende. (Det sista antagandet är nog något diskutabelt). En familj har fyra barn. Beräkna*

*a) sannolikheten att de har två barn av var sort betingat av att deras äldsta barn är en pojke*

*b) sannolikheten att de har två barn av var sort betingat av att de har minst en pojke.*

## 2.1 Hemtal 2

**Uppgift 2.7** *I en fabrik tillverkas en produkt som kan få tillverkningsfel av tre olika slag: A, B och C. Dessa tre fel uppträder oberoende av varandra och med respektive sannolikhet 0.20, 0.05 och 0.10. Beräkna sannolikheten att en tillverkad produkt visar sig vara felaktig, dvs ha minst ett av felen A, B och C.*

**Uppgift 2.8** *Man utför två kast med en tärning. Betrakta händelserna A: det första kastet ger en tvåa eller femma och B: summan av de två resultaten är minst 7. Är händelserna A och B beroende eller oberoende?*

**Uppgift 2.9** *För händelserna A, B och C gäller att* $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0.1$, $\mathrm{P}(A) = 0.5$ *och* $\mathrm{P}(B|A) = 0.4$. *Beräkna* $\mathrm{P}(C|A \cap B)$.

**Uppgift 2.10** *En förenklad typ av spelautomat innehåller två roterande hjul som oberoende av varandra och oberoende varje gång hamnar i något av lägena A, B eller C. Sannolikheten att hamna i de tre lägena är 0.1, 0.3 respektive 0.6 för vardera hjulet. Automaten ger vinst om de båda hjulen kommer i samma läge. Beräkna sannolikheten att det vid spel två gånger i automaten blir förlust vid minst ett tillfälle.*

**Uppgift 2.11** *(Svår) Personerna A och B skjuter mot en måltavla. Oberoende av vem som skjuter är träffsannolikheten vid varje skott p och olika skott träffar oberoende av varandra. Personerna skjuter en och en i ordningsföljden* $A, B, A, B, A, \ldots$ *ända tills två träffar noteras. Beräkna sannolikheten att det är samma person som står för dessa båda träffar.*

Blom: 2.27, 2.29, 2.40, 2.22, 2.23, 2.33, 2.37

# 3 Övning 3: Oberoende händelser (forts.)

**Uppgift 3.1** *I en riskgrupp undersöks personer för en viss sjukdom S. En person får rätt diagnos med sannolikhet 99% om personen har sjukdomen, och med sannolikhet 95% om personen inte har sjukdomen. Vidare vet man att 6% av personerna i riskgruppen får diagnosen ”sjuk”.*

*Bestäm andelen personer i riskgruppen med sjukdomen S och sannolikheten för att en person med diagnosen 'sjuk' har sjukdomen.*

**Uppgift 3.2** *A och B är två oberoende händelser med sannolikheterna 0.5 resp. 0.4. Beräkna den betingade sannolikheten för att både A och B inträffar, då man vet att minst en av händelserna A och B har inträffat.*

**Uppgift 3.3** *Vid en tillverkningsprocess kontrolleras de tillverkade enheterna i en datorstyrd sensor. Härvid klassificeras defekta enheter som defekta med sannolikheten 0.9 och som korrekta med sannolikheten 0.1. Vidare klassificeras korrekta enheter som korrekta med sannolikheten 0.85 och som defekta med sannolikheten 0.15. Vad är den betingade sannolikheten att en enhet är defekt givet att den klassificerats som defekt, om processens felsannolikhet är 0.1?*

## 3.1 Hemtal 3

**Uppgift 3.4** *En tillverkad enhet kan uppvisa A- och B-fel och i genomsnitt har 1 av 200 tillverkade enheter båda slagen av fel. Endast 94% av alla tillverkade enheter är felfria. Av enheterna med fel har 75% A-fel.*

*a) Bestäm andelen av de felaktiga enheterna som har B-fel.*

*b) Förekommer A- och B-fel oberoende av varandra)? (Motivering krävs naturligtvis!)*

**Uppgift 3.5** *Enligt boken ”Vänster hjärna, höger hjärna” av Springer och Deutsch är sannolikheten att en högerhänt person har sitt språkcentrum i vänster hjärnhalva 95%, medan sannolikheten att en vänsterhänt person har sitt språkcentrum i vänster hjärnhalva är 70%. 10% av alla personer är vänsterhänta.*

*a) Beräkna sannolikheten för att en slumpmässigt vald person har sitt språkcentrum i vänster hjärnhalva.*

*b) Beräkna sannolikheten för att en person med språkcentrum i vänster hjärnhalva är vänsterhänt.*

**Uppgift 3.6** *Till ett e-postkonto kommer e-mail varav 65% är ”spam”. Ett spam-filter försöker avgöra om e-mailen är ”spam” och lägger dem i så fall i en speciell mapp ”suspected spam”. Totalt hamnar 60% av alla e-mail i denna mapp. Filtret är dock inte perfekt, utan 96% av e-mailen i ”suspected spam” är ”spam” medan alltså 4% av dem är felaktigt klassificerade som ”spam”.*

*Hur stor andel av ”spam”-mailen som kommer till e-postkontot klassas av filtret som ”spam”?*

**Uppgift 3.7** *I faderskapsmål undersökt ofta blodgrupper hos moder, barn och den utpekade fadern. För enkelhets skull betraktar vi bara det så kallade AB0-systemet (i verkligheten undersökt ett flertal blodgruppssystem). För barn vars moder har blodgrupp 0 beror den av faderns blodgrupp betingade sannolikheten att barnet skall få blodgrupp A0 enligt: Sannolikheten att en på måfå vald man skall ha blodgrupp A0, AA, AB respektive*

| faderns blodgrupp | P(barnet får blodgrupp A0) |
|---|---|
| A0 | 1/2 |
| AA | 1 |
| AB | 1/2 |
| Övriga | 0 |

*"övriga" är 0.36, 0.08, 0.02 och respektive 0.54. Beräkna sannolikheten att fadern AA när barnet har A0 och modern 0.*

**Uppgift 3.8** *Anna och Mary spelar ett spel i vilket de kastar en röd och blå tärning. Anna kastar tärningarna men döljer kasten för Mary. Hon säger dock att "den röda tärningen visar fler (och inte lika många) ögon än den blå tärningen". Det gäller nu för Mary att gissa hur många ögon den blå tärningen visar.*

*Hjälp Mary genom att räkna ut sannolikheten för att den blå tärningen visar 1, 2, 3, 4, 5 respektive 6 ögon, givet den information hon fått av Anna.*

**Uppgift 3.9** *Antag att inkommande e-postmeddelanden är skräppost (spam) eller relevanta med sannolikhet 0.40 resp. 0.60 oberoende av tidigare e-postmeddelanden. Man har analyserat förekomsten av ord i e-postmeddelanden och funnit att vissa ord förekommer oftare i skräppost än i meddelanden i allmänhet. Speciellt har man funnit att ordet "extra" förekommer i 1% av samtlig epost (dvs relevant post och skräppost) men i 2.2% av skräppost.*

*Bestäm sannolikheten att ett inkommande e-postmeddelande som innehåller ordet "extra" är relevant (inte skräppost).*

Blom: 2.3, 2.39, 2.41

# 4 Övning 4: Diskreta stokastiska variabler

**Uppgift 4.1** *I ett lotteri ingår 1000 lotter. Det finns en vinst på 100 kr, 5 vinster på vardera 20 kr och 30 vinster på 5 kr. Varje lott kan ge högst en vinst. En person köper en lott. Låt $X$ vara bruttovinsten på en lott.*

*a) Vilka värden kan $X$ anta?*

*b) Bestäm sannolikhetsfunktionen för $X$.*

*c) Bestäm bruttovinstens väntevärde och standardavvikelse.*

*d) Bestäm nettovinstens väntevärde och standardavvikelse.*

**Uppgift 4.2** *Ett bibliotek har i genomsnitt 78 besökare en vanlig fredag. Bestäm sannolikheten att det en vanlig fredag kommer fler än 90 besökare. Ange noga vilka antaganden du gör.*

**Uppgift 4.3** *a) Om 15 personer singlar slant med två mynt vardera, vilken fördelning har antalet personer som får samma resultat på de båda mynten?*

*b) Vad är sannolikheten att antalet personer som får samma resultat på de båda mynten är mindre än 6?*

**Uppgift 4.4** *Två defekta enheter har av misstag hamnat tillsammans med tre felfria enheter. För att finna de felfria testar man i tur och ordning en enhet i taget tills man antingen har funnit de båda defekta eller de tre felfria.*

*a) Bestäm fördelningen för $X$, antalet testade enheter.*

*b) Bestäm det genomsnittliga antalet testade enheter, $E(X)$ samt $D(X)$.*

**Uppgift 4.5** *Vid en viss fredagskväll är 1% av alla bilförare alkoholpåverkade. Olika bilförare antages alkoholpåverkade oberoende av varandra. I en poliskontroll kan man t.ex. - som i a) - kontrollera ett visst antal bilister eller - som i b) - kontrollera bilisterna tills man hittar den första påverkade föraren.*

*a) Beräkna sannolikheten för att man hittar minst en alkoholpåverkad förare om polisen kontrollerar 50 st slumpmässigt valda bilister.*

*b) Ange väntevärdet och standardavvikelsen för antalet bilar man måste kontrollera för att hitta den första påverkade föraren.*

**Uppgift 4.6** *(Svår) Antalet partiklar $X$ som inkommer under en timme till en partikelräknare är $Po(\mu)$. Varje partikel har sannolikheten p att registreras och detta sker helt oberoende av övriga partiklar. Låt $Y$ vara antalet registrerade partiklar.*

*a) Bestäm* $\mathrm{P}(Y = k|X = n), \quad k, n = 0, 1, 2, \ldots$

*b) Bestäm* $\mathrm{P}(Y = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

## 4.1 Hemtal 4

**Uppgift 4.7** *I en fabrik används en maskin för att tillverka 10 stycken enheter. Varje enhet blir defekt med sannolikheten 0.1, oberoende av andra enheter. De enheter som inte är defekta kallar vi korrekta.*

*Alla defekta enheter kasseras. De korrekta enheterna packeteras tre och tre, och går vidare till försäljning. De korrekta enheterna som eventuellt blir över efter att personalen gjort så många förpackning (om tre korrekta enheter var) som möjligt, kasseras också.*

*a) Beräkna sannolikheterna för att inga korrekta enheter behöver kasseras.*

*b) Beräkna väntevärdet av antalet förpackningar (om tre korrekta enheter) som kan göras.*

**Uppgift 4.8** *a) En tjuv som tar ditt bankomatkort försöker att knäcka koden. Koden består av fyra siffror. Efter tre misslyckade försök så tar bankomaten hand om kortet. Tjuven väljer kod helt slumpmässigt, dock inte samma kod två gånger på ett och samma kort. Beräkna sannolikheten att tjuven knäcker koden innan kortet försvinner in i bankomaten efter tre försök.*

*b) Antag att det av olika tjuvar stjäls 10000 bankomatkort under ett år. För varje kort så görs det försök, att på samma sätt som ovan, att knäcka koden. Tjuvarna utbyter inte information sinsemellan om vilka koder som de har använt för att försöka knäcka koden på ”deras” kort. Vad är sannolikheten att koden knäcks på tre eller flera kort? Om du inte har svarat på a) så får du anta att svaret där skall vara 0.0001.*

**Uppgift 4.9** *Man drar fem kort på måfå ur en vanlig kortlek och tittar efter om man fått precis tre spader eller inte. Har man inte fått precis tre spader stoppar man tillbaka korten, blandar väl, och drar ånyo fem kort på måfå. Man fortsätter så tills man får precis tre spader. Låt $X$ vara totala antalet försök. Om man t.ex. får precis tre spader redan vid första dragningen är alltså $X = 1$, osv. Bestäm väntevärdet $E(X)$.*

**Uppgift 4.10** *(Svår) Studenterna Ali, Björn och Cecilia har avslutat ett barbesök. De vill låta slumpen avgöra vem av de tre som ska betala notan. Till sin hjälp har de endast ett mynt (med lika chans för ”krona” som ”klave”). Cecilia föreslår: - Singla slanten och räkna antalet kast som behöver göras för att ”krona” skall komma upp första gången. Om det blir ett jämnt antal kast så betalar jag, annars får ni göra upp om notan med ett sista kast.*

*a) Visa att Cecilias förslag är rättvist, dvs att alla tre löper samma risk att få betala.*

*b) Beräkna det förväntade antalet kast som behöver göras totalt, inklusive det eventuella sista kastet som kan behöva göras för att välja mellan Ali och Björn.*

Blom: 3.9, 3.27, 7.1, 3.8, 3.3ac, 3.4, 3.10, 3.11, 5.2

# 5 Svar

## 5.1 Övning 1

**1.2** a) 0.25, b) 0.05, c) 0.15, d) 0.20, **1.3** a) 11/850, b) 703/1700, c) 1/5525, **1.4** a)$4/\binom{52}{5} \approx 1.54 \cdot 10^{-6}$, b) $40/\binom{52}{5} \approx 1.54 \cdot 10^{-5}$, c) $4 \cdot \binom{13}{5}/\binom{52}{5} \approx 1.98 \cdot 10^{-3}$, **1.5** $1 - \frac{364!}{365^{22} \cdot 342!} \approx 0.507$,

## 5.2 Övning 2

**2.1** 0.855. $A^\star$ och $B^\star$ är också oberoende, **2.2** a) Nej, b) Nej, **2.3** $A$ och $B$ är ej oberoende, ty $\mathrm{P}(A \cap B) \neq \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, **2.4** $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = 1/3$. Det är ingen nackdel att välja sist, **2.5** 11/20, **2.6** a) $3p(1-p)^2$, b) $\frac{6p^2(1-p)^2}{1-(1-p)^4}$, **2.7** 0.316, **2.8** $A$ och $B$ är oberoende, **2.9** 0.5, **2.10** 0.7884, **2.11** $\frac{1-p}{2-p}$.

## 5.3 Övning 3

**3.1** Andelen personer med sjukdomen $S$ är 0.0106 och den sökta sannolikheten är 0.176, **3.2** 2/7, **3.3** 0.4, **3.4** a) 1/3, b) Nej, **3.5** a) 0.925, b) 0.076, **3.6** 0.8862, **3.7** 8/27, **3.8** $\frac{6-j}{15}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$. **3.9** 0.12.

## 5.4 Övning 4

**4.1** a) $\Omega_X = \{0, 5, 20, 100\}$, b) $p_X(0) = 964/1000$, $p_X(5) = 30/1000$, $p_X(20) = 5/1000$, $p_X(100) = 1/1000$, c) Väntevärde 0.35, varians 3.55, d) Väntevärde -0.15, varians 3.55, **4.2** 0.081, **4.3** a) Bin(15, 1/2), b) 0.304 **4.4** a) $\mathrm{P}(X = 2) = 1/10$, $\mathrm{P}(X = 3) = 3/10$, $\mathrm{P}(X = 4) = 6/10$, b) Väntevärde 3.5, standardavvikelse $\sqrt{0.45}$, **4.5** a) 0.395, b) 99.5, **4.6** a) $\mathrm{P}(Y = k|X = n) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, b) $\mathrm{P}(Y = k) = \frac{(p\mu)^k}{k!}e^{-p\mu}$, $0 \leq k \leq n$, dvs $Y$ är Poissonfördelad med parameter $p\mu$, **4.7** a) 0.399, b) 2.73 **4.8** a) 0.0003, b) 0.5768, **4.9** 12.26, **4.10** b) 8/3.