SF1901: Övningshäfte

1 oktober 2013

Uppgifterna under rubriken *Övning* kommer att gås igenom under övningstillfällena. Uppgifterna under rubriken *Hemtal* är starkt rekommenderade och motsvarar nivån på tentamen. Om de uppgifterna upplevs som för svåra finns det enklare uppgifter i kursboken. De ligger sist på varje övning under rubriken *Blom*.

9 Övning 9: Punktskattningar, väntevärdesriktighet, effektivitet

Uppgift 9.1 *I ett mätinstrument används ett specialbatteri. För fem batterier har man mätt hur lång tid de ger tillräcklig spänning och fått följande observationer: 5, 4, 6, 4 och 7 (timmar). De erhållna värdena kan ses som observationer på oberoende stokastiska variabler* $X_1, \ldots, X_5$. *Låt* $\mu = E(X_i)$ *och* $\sigma^2 = V(X_i)$.

a) Skatta μ *och* σ^2 *på lämpligt vis.*

b) Visa att skattningarna är väntevärdesriktiga.

c) Bestäm standardavvikelsen och medelfelet för skattningen av μ.

Uppgift 9.2 *Man har ett slumpmässigt stickprov* $x_1, \ldots, x_n$ *från* $N(\mu, \sigma)$ *där* μ *och* σ *är okända. Man bildar skattningarna*

$$\mu^\star_{obs} = \bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \quad \text{och} \quad \hat{\mu}_{obs} = \frac{x_1 + x_n}{2}.$$

a) Visa att båda skattningarna är väntevärdesriktiga.

b) Vilken av skattningarna $\mu^\star_{obs}$ *och* $\hat{\mu}_{obs}$ *är effektivast?*

Uppgift 9.3 *Man vill skatta hur stor andel av den vuxna befolkningen i en stad som har bil. Antag att denna andel är* p *och att det finns* N *vuxna människor i staden. Låt* X *vara antalet bilägare i ett slumpmässigt urval om* n *personer som dragits med återlämning och* Y *antalet bilägare i ett slumpmässigt urval om* n *personer som dragits utan återlämning. Storheterna* $p^\star = X/n$ *och* $\hat{p} = Y/n$ *är då två olika skattningar av* p.

a) Beräkna väntevärde och varians för $p^\star$ *respektive* $\hat{p}$.

b) Vilken skattning är effektivast?

c) Beräkna skattningarna av p, *samt medelfelen* $d(p^\star)$ *och* $d(\hat{p})$ *om* $N = 1000$, $n = 100$ *och man får 23 bilägare (i båda urvalen).*

Uppgift 9.4 *$x_1, \ldots, x_n$ är observationer från oberoende Maxwellfördelade stokastiska variabler, dvs från variabler med täthetsfunktionen*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\alpha^{3/2}} e^{-x^2/(2\alpha)}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

där $\alpha > 0$ är en parameter. Denna fördelning har väntevärde $\sqrt{8\alpha/\pi}$ och varians $\alpha(3 - 8/\pi)$. För att skatta α använder vi skattningen

$$\alpha^\star_{obs} = \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Är $\alpha^\star$ en väntevärdesriktig skattning?

Uppgift 9.5 *Vissa problem i partikelfysik ger upphov till följande sannolikhetstäthet*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \theta x), & -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{för övrigt}, \end{cases}$$

där $-1 \le \theta \le 1$ är en okänd parameter.

a) Varför måste vi kräva att olikheterna $-1 \le \theta \le 1$ skall gälla?

b) Antag att $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler som alla har denna fördelning. En i statistikfrågor välbevandrad vän till dig föreslår en skattningsfunktion för θ av formen

$$\theta^\star = c \cdot \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n).$$

Hur bör konstanten c väljas för att $\theta^\star_{obs}$ blir en väntevärdesriktig punktskattning?

9.1 Hemtal 9

Uppgift 9.6 *Vad menas med att en skattning av en parameters är väntevärdesriktig? Vilka av nedanstående sex svar är riktiga.*

1. *Skattningen sammanfaller med stickprovsmedelvärdet.*
2. *Skattningen är ett viktat medelvärde av observationerna.*
3. *Skattningen ger rätt parametervärde i genomsnitt om man genomför ett stort antal försök.*
4. *Skattningen ger rätt parametervärde när man skattar en fördelnings medelvärde.*
5. *Skattningen ger alltid rätt parametervärde.*
6. *Väntevärdet av stickprovsvariabeln är lika med det rätta parametervärdet.*

Uppgift 9.7 *Låt θ^*_{obs} och $\hat{\theta}_{obs}$ vara två oberoende väntevärdesriktiga punktskattningar av θ med de kända varianserna σ_1^2 respektive σ_2^2.*

a) Visa att $\tilde{\theta}_{obs} = a\theta^*_{obs} + (1-a)\hat{\theta}_{obs}$ är en väntevärdesriktig punktskattning av θ för alla tal a.

b) För vilket värde på a får man den effektivaste skattningen?

Uppgift 9.8 *Ingenjören Lennart arbetar för en biltillverkare, och vill undersöka hur vanligt det är att bilar av en viss typ, tillverkade av företaget havererar på grund av fel på drivlinan. Via två olika försäkringsbolag får han uppgifter om 1212 respektive 1456 bilar av den aktuella typen. Av dessa bilar har 36 respektive 56 stycken drabbats av haveri på grund av drivlinan under det senaste året.*

Lennart ställer upp två olika skattningar av sannolikheten att en bil av den aktuella typen drabbas av haveri som ovan, under en period av ett år; dels

$$\frac{1}{2}\left(\frac{36}{1212} + \frac{56}{1456}\right),$$

som är ett medelvärde av skattningar från de båda försäkringsbolagen, och dels

$$\frac{36+56}{1212+1456},$$

som är en annan kombination av de data han har.

a) Formulera en lämplig statistisk modell som beskriver situationen, dvs definiera lämpliga stokastiska variabler från vilka observationerna är dragna, specificera vilka fördelnings dessa variabler har och inför parametrar som du behöver. Antag att det inte finns någon skillnad i sannolikhet för fel på drivlinan mellan de bilar som är försäkrade i de olika bolagen. Visa att båda skattningarna ovan kommer från skattare (stickprovsvariabel) som är väntevärdesriktiga.

b) Vilken skattning bör Lennart välja om han tänker på effektivitet (varians)? Beräkna också medelfelet (en skattning av standardavvikelsen för skattaren) för den skattning du föredrar.

Uppgift 9.9 *De stokastiska variablerna Y_i, $i = 1, \ldots, n$ är oberoende och har alla samma täthetsfunktion given av*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}y, & 0 < y < \theta, \\ 0, & \textit{för övrigt}, \end{cases}$$

där $\theta > 0$ är den statistiska parametern. För att skatta θ på basis av stickprovet $y_1, \ldots, y_n$, som består av oberoende utfall av $Y_1, \ldots, Y_n$, respektive, föreslås punktskattningen

$$\theta^*_{obs} = \frac{3}{2}\bar{y} = \frac{3}{2n}(y_1 + \cdots + y_n).$$

a) Är θ^*_{obs} en väntevärdesriktig punktskattning? Motivera ditt svar genom att visa de erforderliga kalkylerna.

b) Bestäm variansen $Var(\theta^*)$. Du förväntas visa dina kalkyler.

Blom: 10.1, 11.3, 11.4

10 Övning 10: Konfidensintervall, del 1

Uppgift 10.1 *Ett avståndsinstrument ger mätvärden (enhet: meter) som är oberoende och normalfördelade med väntevärde μ lika med det sanna avståndet och med den kända standardavvikelsen $\sigma = 5 \cdot 10^{-3}$ meter. Man har gjort fyra mätningar av avståndet mellan två punkter (mm):*

$$1132.155 \quad 1132.158 \quad 1132.145 \quad 1132.163.$$

Bestäm ett 95% konfidensintervall för avståndet μ.

Uppgift 10.2 *På en lösning med det okända pH-värdet μ har man gjort fyra pH-bestämningar:*

$$8.24 \quad 8.18 \quad 8.15 \quad 8.23.$$

Mätaren kan anses ha ett systematiskt fel Δ samt ett slumpmässigt fel ϵ som beskrivs av normalfördelningen med väntevärde 0. Om det är känt att $\Delta = 0.10$, bestäm ett konfidensintervall för μ med konfidensgrad 99%.

Uppgift 10.3 *a) För att undersöka en viss medicin, vars primära biverkan är att höja ett visst levervärde, gjordes mätningar dels på 50 personer som ej behandlats med medicinen (mätvärden $x_1, \ldots, x_{50}$), dels på 25 personer som behandlats (mätvärden $y_1, \ldots, y_{25}$). Man erhöll*

$$\bar{x} = 148.2 \quad \bar{y} = 151.7$$
$$s_x = 10.0 \quad s_y = 8.0.$$

Bestäm ett 95% konfidensintervall för skillnaden mellan levervärde för de två grupperna. Ange alla antaganden.

b) I en alternativ studie mättes levervärdet före och efter behandling på 25 patienter (mätvärden x_i resp. y_i, $i = 1, \ldots, 25$). Man erhöll

$$\bar{x} = 149.0 \quad \bar{y} = 150.9$$
$$s_x = 8.1 \quad s_y = 9.5,$$

samt, för $z_i = x_i - y_i$,

$$s_z = 1.6.$$

Bestäm ett 95% konfidensintervall för skillnaden mellan förväntat levervärde före och efter behandling; ange noga alla antaganden.

Uppgift 10.4 *En fysiker har gjort 5 mätningar för att bestämma en fysikalisk konstant μ. Mätningarna kan anses som observationer på oberoende normalfördelade stokastiska variabler med väntevärde μ och känd varians. Resultatet var ett 90% konfidensintervall $(7.02, 7.14)$ vilket ansågs vara för brett och ha för låg konfidensgrad. Hur många mätningar krävs för att få ett konfidensintervall som har*

a) konfidensgrad 90% och är hälften (tiondelen) så brett?

b) konfidensgrad 99% *och samma bredd?*

c) konfidensgrad 99% *och är hälften (tiondelen) så brett?*

Uppgift 10.5 *Två förskolor, Bullerbyn och Skogsgläntan, finns i samma stad men är belägna nära en trafikled respektive i kanten av ett skogsområde. Kommunens miljöenhet tror att Bullerbyns läge kan göra att barnen där får förhöjda halter av bly i blodet. Miljöenheten valde slumpmässigt ut fem barn från vardera skola och mätte deras halter av bly i blodet. Resultatet, redovisat i blykoncentration (ngml) blev enligt följande*

Bullerbyn	0.93	0.63	1.21	1.30	0.58
Skogsgläntan	0.96	0.43	0.93	0.85	0.48

Undersök genom att göra ett lämpligt konfidensintervall om miljöenhetens misstanke kan styrkas. Antag att variationen i blyhalt mellan barn på respektive förskola är normalfördelad med en varians som är densamma för de båda förskolorna.

10.1 Hemtal 10

Uppgift 10.6 *En forskare har konstruerat konfidensintervall för 15 olika okända konstanter. Varje konfidensintervall har konfidensgraden 0.90 och de olika intervallen härrör från av varandra oberoende mätserier. Vissa av konfidensintervallen, i bästa fall alla, är korrekta, dvs innehåller den avsedda konstanten, medan något eller några nog missar sitt mål. Vilka av de 15 intervallen som missar vet man inte, men man kan överväga hur många intervall som rimligen kan vara fel.*

a) Om man använder den beskrivna metoden, hur stor är sannolikheten att vart och ett av de 15 intervallen innehåller den avsedda konstanten?

b) Vilket är det mest sannolika värdet på antalet intervall som missar den okända konstanten?

Uppgift 10.7 *a) Simulare 10 observationer från en normalfördelning* $N(12{,}2)$. *Låtsas att väntevärdet* μ *är okänt men att* $\sigma = 2$ *är känt. Bilda ett 95% konfidensintervall för väntevärdet* μ. *Ligger det korrekta värdet i detta intervall?*

b) Upprepa ovanstående 1000 gånger, dvs simulera 1000 stickprov med 10 observationer vardera och bilda 95% konfidensintervall för μ *för vart och ett av stickproven. Hur många av de 1000 intervallen innehåller det korrekta värdet 12?*

c) Låtsas som om standardavvikelsen σ *också är okänd och bilda de 1000 konfidensintervallen för* μ *som data i b) ger upphov till. Hur många av intervallen innehåller det korrekta värdet 12?*

Uppgift 10.8 *Vad menas med att ett konfidensintervall för en parameter* θ *har konfidensgraden 95%? Vilka av följande svar är riktiga.*

1. *I det långa loppet innehåller intervallet* θ *i 95% av försöken.*

2. *I genomsnitt över många försök innehåller intervallet 95% av observationerna.*

3. Minst 95% av observationerna faller alltid inom intervallet.

4. Det är 95% chans att intervallet kommer att hamna så att det innehåller θ.

Uppgift 10.9 *På en lösning med det okänga pH-värdet μ har man gjort fyra pH-bestämning:*

$$4.32 \quad 4.22 \quad 4.23 \quad 4.37.$$

Vidare har man med samma mätare gjort sex bestämningar på en lösning med det kända pH-värdet 4.84:

$$4.71 \quad 4.63 \quad 4.69 \quad 4.76 \quad 4.58 \quad 4.83.$$

Modell: pH-mätaren har ett systematiskt fel Δ samt ett slumpmässigt fel som är $N(0, \sigma)$; Δ och σ är okända. Resultatet av en mätning på en lösning med pH-värdet a är alltså en observation av $N(a + \Delta, \sigma)$.

a) Ange en punktskattning μ^*_{obs} av μ.

b) Ange $D(\mu^*)$.

c) Beräkna medelfelet $d(\mu^*)$.

d) Ange ett 95% konfidensintervall för μ.

Uppgift 10.10 *För att jämföra två vågar, A och B, vägde man 6 olika föremål och fick följande resultat:*

Föremål	*i*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Obs. av*
Våg A	x_i	*1.0*	*7.7*	*9.6*	*21.0*	*32.3*	*22.6*	$X_i \in N(\mu_i, \sigma_A)$
Våg B	y_i	*3.1*	*8.8*	*12.0*	*19.5*	*35.5*	*32.5*	$Y_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_B)$

Observerade värdena $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ resp. $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ från våg A resp. våg B kan ses som obervationer på $N(\mu_i, \sigma_A)$- resp. $N(\mu_i + \Delta, \sigma_B)$-fördelade stokastiska variabler. Alla underliggande stokastiska variabler förutsätts vara oberoende. Δ anger den systematiska skillnaden mellan våg A och våg B.

a) Beräkna ett lämpligt 95%-igt konfidensintervall för systematiska skillnaden Δ.
b) Antag att vågarnas standardavvikelser är kända, $\sigma_A = 2$ och $\sigma_B = 3$.

Beräkna ett lämpligt 95%-igt konfidensintervall för systematiska skillnaden Δ under denna nya förutsättning.

Uppgift 10.11 *Vid en SJ-verkstad vill man undersöka ett bromssystem för höghastighetståg i låg lufttemperatur. En viktig parameter är μ = konvektiva hastigheten för dissipation av värme (kW) i bromsskivan.*

Verkstadens mätningar av μ är behäftade med mätfel. Som modell för mätningarna använder järnvägsfolket normalfördelningen $N(\mu, \sigma)$, där σ är känt. De vill härmed intervallskatta μ som fördelningens väntevärde och konstruerar för en serie av n mätvärden $x_1, \ldots, x_n$ intervallet

$$I_\mu = \left(\bar{x} - 0.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.06\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

där $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

a) Vad är konfidensgraden för detta I_μ *? Du skall betrakta* $x_1, \ldots, x_n$ *som utfall av oberoende* $X_1, \ldots, X_n$*, som är* $N(\mu, \sigma)$ *-fördelade.*

b) SJ gör fem mätserier med var sina n *observationer. De fem serierna är oberoende av varandra. För varje serie bestäms konfidensintervallet* I_μ*. Vad är sannolikheten att minst fyra av dessa intervall innehåller det okända* μ*. Ifall Du inte klarat av att lösa uppgiftens del a), så kan Du använda konfidensgraden* 0.90 *i denna deluppgift.*

Blom: 12.13, 12.21, 12.17, 12.10, 12.22, 12.24 (antag N-fördelning)

11 Övning 11: Konfidensintervall, del 2

Uppgift 11.1 *Två företag, A och B, har telefon-"support", och man ville uppskatta skillnaden i väntetid i telefon innan man kommer fram till "supporten" mellan de två företagen. Av 420 telefonsamtal till företag A blev genomsnittliga väntetiden 26.0 minuter, av 376 telefonsamtal till B blev genomsnittliga väntetiden 31.6 minuter. Antag att bägge företagen har exponentialfördelade väntetider, och bestäm ett approximativt konfidensintervall med konfidensgrad approximativt* 95% *för skillnaden i väntevärden (av väntetiderna)* $\mu_B - \mu_A$. *Ange också om någon slutsats kan dras med approximativ felrisk* 5% *angående vilket företag som har den längsta förväntade väntetiden. Svaret skall alltså både innehålla ett konfidensintervall och en sådan slutsats.*

Uppgift 11.2 *Trafiken på en viss väg kan beskrivas som att antalet bilar som passerar en fix punkt under ett visst tidsintervall (längd t minuter) är* $Po(\lambda t)$. *Under ett intervall om tio minuter fann man att det passerade* 400 *bilar.*

a Beräkna ett approximativt 95% *konfidensintervall för* 10λ.

b Beräkna ett approximativt 95% *konfidensintervall för* λ.

Uppgift 11.3 *Nationalekonomiprofessorerna Peter Bohm och Martin Dufwenberg genomförde ett experiment med 396 studenter på grundkursen i nationalekonomi vid Stockholms universitet. Dessa studenter får anses vara relativt väl förtrogna med EMU-frågan.*

Ett slumpvis urval av hälften av studenterna fick frågan "Skall Sverige gå med i EMU och införa euro som betalningsmedel?" där 107 av 198 tillfrågade svarade "Ja", den andra hälften fick frågan "Skall Sverige gå med i EMU och avskaffa kronan som betalningsmedel?" där 95 av 198 tillfrågade svarade "Ja".

Beräkna ett (approximativt) 95%*-igt konfidensintervall för skillnaden i "Ja"-andelar och använd detta för att på nivån* 5% *testa om undersökningen ger belägg för att frågeformuleringen påverkar resultatet.*

Uppgift 11.4 *En undersökning har gjorts av föroreningarna i Motala ström. Under 70 olika dagar togs 30 prover uppströms från en fabrik och 40 prover nedströms från samma fabrik. För varje dag mättes storleken av en viss förorening och eftersom proven togs olika dagar kan de anses oberoende. Resultatet var*

	Medelvärde	Standardavvikelse
Uppströms	13.2	2.8
Nedströms	86.1	38.7

Då värdena nedströms fluktuerade väldigt mycket mellan dagar kan de inte anses komma från en normalfördelning.

Bilda ett approximativt 95% *konfidensintervall som kan användas för att bedöma den eventuella nedsmutsningen från fabriken ifråga.*

Uppgift 11.5 *Antag att antalet trafikolyckor med dödlig utgång under två på varandra följande år kan beskrivas av oberoende Poissonfördelade stokastiska variabler. Under dessa två år inträffade 537 respektive 453 dödsolyckor. Den ansvarige ministern för trafikfrågor i landet i fråga tog denna nedgång som intäkt för den skickligt förda politiken, medan oppositionen ansåg att nedgången endast berodde på slumpen.*

Bilda ett approximativt 95% konfidensintervall för skillnaden i det förväntade antalet olyckor för de två åren. Verkar det stödja ministerns påstående att skillnaden mellan de båda åren inte bara var på grund av slumpen?

11.1 Hemtal 11

Uppgift 11.6 *Vid livstidsprovning av elektriska komponenter sätter man n exemplar av komponenten i arbete vid en tidpunkt $t = 0$ och låter dem arbeta under uppsikt tills de upphör att fungera och man registrerar tidpunkterna för detta, dvs livslängderna $x_1, \ldots, x_n$.*

Följande antaganden gjordes: Olika exemplars livslängder ses som utfall av oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärde m.

Beräkna konfidensintervall för m med den approximativa konfidensgraden 90% följande två fall:

a) Man håller kontinuerlig uppsikt och observerar $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ge ett numeriskt svar då $n = 50$ och man observerat livslängderna (ordnade i storleksordning)

0.1	0.1	0.2	0.9	1.2	1.3	1.8	1.8	2.0	2.0
2.0	2.1	2.1	2.3	2.6	2.7	3.0	3.5	3.6	3.8
3.8	3.8	4.8	5.1	5.9	7.3	7.6	7.7	8.5	8.6
8.8	9.1	12.0	12.8	13.4	13.6	14.1	14.2	14.7	16.3
16.7	16.8	16.9	20.6	22.1	25.7	26.3	32.0	33.3	40.3

För de givna värdena gäller att $\bar{x} = 9.63$.

*b) Till skillnad från i a-delen observerar man endast **antalet** komponenter som fortfarande fungerar vid tiden $t = 6$, dvs att 25 av de 50 komponenterna fungerar.*

Uppgift 11.7 *Ur ett stort varuparti tog man ut ett stickprov om 600 enheter. Av dessa befanns 24 vara felaktiga. Bestäm ett konfidensintervall med approximativ konfidensgrad 95% för $p =$ andelen felaktiga enheter i partiet.*

Uppgift 11.8 *(Forts. från problem 11.7) Hur stort stickprov måste man ta för att med 95% konfidensgrad kunna uppskatta p på 0.005 när*

a) om p är helt okänd?

b) om det är känt att $0 < p < 0.04$?

Uppgift 11.9 *Vid jämförelse av två opinionsundersökningar framgår det att av de 1704 intervjuade i oktober sympatiserade 46.5% med det borgerliga blocket och 45.6% av de 1689 i november. Beräkna ett konfidensintervall för förändringen av andelen mellan de två undersökningarna med approximativ konfidensgrad 95%. Väljarkåren kan betraktas som oändligt stor jämfört med urvalens storlek.*

Uppgift 11.10 *Man har ett stickprov $x_1, \ldots, x_6$ och $y_1, \ldots, y_{12}$ från $N(\mu_1, \sigma)$ respektive $N(\mu_2, \sigma)$, där μ_1, μ_2 och σ är okända. Medelvärde och varians i stickproven är $\bar{x} = 49.2$, $s_x^2 = 8.80$ respektive $\bar{y} = 37.4$, $s_y^2 = 3.04$. Beräkna ett 90% konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.*

Uppgift 11.11 *Antalet anrop X till en telefonväxel under den brådaste timmen på dagen är $Po(\mu)$. Under 8 dagar har man fått följande oberoende observationer på X:*

$$115 \quad 82 \quad 108 \quad 106 \quad 118 \quad 87 \quad 99 \quad 92.$$

Bestäm ett approximativt 95% konfidensintervall för μ.

Uppgift 11.12 *I december 2007 gjorde SIFO en undersökning av stödet för de olika partiledarna i svensk politik.*

a) I undersökningen angav 249 av 498 tillfrågade kvinnor att de hade ”Stort eller mycket stort förtroende” för Mona Sahlin. Ange ett 95%-igt approximativt konfidensintervall för denna andel.

b) Bland 471 tillfrågade män angav 212 att de hade ”Stort eller mycket stort förtroende” för Mona Sahlin. Var det någon statistiskt säkerställd (approximativ nivå 5%) skillnad mellan könen vad avser denna preferens?

Blom: 12.30, 12.36

Svar

Övning 9

9.1a) $\mu^*_{obs} = \bar{x} = 5.2$, $(\sigma^2)^*_{obs} = s^2 = 1.7$, c) $D(\mu^*) = \sigma/\sqrt{n}$, $d(\mu^*) = (\sigma/\sqrt{n})^*_{obs} = s/\sqrt{n} = 0.583$.
9.2b) μ^*_{obs} är effektivast om $n > 2$.
9.3a) $\mathrm{E}(p^*) = \mathrm{E}(\hat{p}) = p$, $\mathrm{Var}(p^*) = \frac{p(1-p)}{n}$, $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$, b) $\hat{p}$ har mindre varians än p^*, c) $p^*_{obs} = \hat{p}_{obs} = 0.23$, $d(p^*) = \sqrt{1.771 \cdot 10^{-3}}$, $d(\hat{p}) = \sqrt{1.595 \cdot 10^{-3}}$.
9.4 Ja.
9.5a) För att $f(x) \geq 0$ för alla x. b) $c = 3$,
9.6 De rätta alternativen är 3 och 6.
9.7 b) $a = \sigma_2^2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
9.8 Se Tentamen 120813, Uppgift 6.
9.9 a) Ja, θ^*_{obs} är en väntevärdesriktig skattning av θ, b) $\mathrm{Var}(\theta^*) = \theta^2/8n$.

Övning 10

10.1 $I_\mu == 1132.155 \pm 0.005$.
10.2 $I_\mu = (7.98, 8.22)$
10.3 a) $I_{\mu_y - \mu_x} = 3.5 \pm 4.58$, b) $I_\Delta = 1.9 \pm 0.66$
10.4 a) Hälften så brett ger $n = 20$, tiondelen så brett ger $n = 500$, b) Hälften så brett ger $n = 50$, tiondelen så brett ger $n = 1227$.
10.5 $I_{\mu_x - \mu_y} = [-0.15, \infty)$.
10.6 a) 0.21, b) Ett intervall.
10.8 De rätta alternativen är 1 och 4.
10.9 a) $\mu^*_{obs} = 4.425$, b) $D(\mu^*) = \sigma\sqrt{5/12}$, c) $d(\mu^*) = 0.054$, d) $I_\mu = (4.30, 4.55)$.
10.10 a) $I_\Delta = 2.8667 \pm 3.9972$, b) $I_\Delta = 2.8667 \pm 2.8850$.
10.11 a) Konfidensgraden för I_μ är approximativt 70%, b) Sannolikheten för att minst fyra I_μ innehåller μ är 0.501.

Övning 11

11.1 $I_{\mu_B - \mu_A} = 5.6 \pm 4.05$. Eftersom intervallet bara innehåller positiva tal drar vi slutsatsen att $\mu_B > \mu_A$.
11.2 a) $I_{10\lambda} = (361{,}439)$, b) $I_\lambda = (36.1, 43.9)$.
11.3 $I_{p_1 - p_2} = 0.060 \pm 0.098$.
11.4 $I_{\mu_2 - \mu_1} = 72.9 \pm 12.0$.
11.5 $I_{\mu_1 - \mu_2} = 84 \pm 62$.
11.6 a) $I_m = 9.63 \pm 2.24$, b) $I_m = (6.25, 12.43)$.
11.7 $I_p = (0.024, 0.056)$,
11.8 a) $n \approx 40000$, b) $n \approx 6000$,
11.9 $I_{opinion} = -0.009 \pm 0.034$,
11.10 $I_{\mu_1 - \mu_2} = (9.9, 13.7)$,
11.11 $I_\mu = 100.9 \pm 7.0$,
11.12 a) $I_p = 0.50 \pm 0.044$, b) $I_{p-q} = 0.05 \pm 0.063$.