Markovprocesser
SF1904

Johan Westerborn

johawes@kth.se

Föreläsning 1
Markovprocesser

Föreläsningsplan

Föreläsningsplan

1. Kursinformation
2. Stokastiska processer
3. Betingade sannolikheter
4. Diskreta Markovkedjor
5. Absorption

Kursregistrering

- Kursregistrering sker via Mina Sidor
- Funkar det inte? Följ instruktionerna på första sidan. Kontakta sen Anne Riddarström (annrid@kth.se) med personnummer och kurskoden.

Kursmaterial

- Enger och Grandell, Markovprocesser och köteori.
  - Finns att köpa i kårbokhandeln.
  - Finns som pdf på kurshemsidan.
  - Kursen omfattar hela kompendiet.
- På kurshemsidan finns bland annat,
  - Föreläsnings slides.
  - Formelsamling och tabeller, skiljer sig från SF1901.
  - Lathund för miniräknare.
  - Tilläggsmaterial.
  - Gamla tentor.

Schema och examination

- Schemat omfattar
  - 6 stycken föreläsningar. Sista föreläsningen 9e maj,
    Johan Westerborn.
  - 9 stycken övningar i två grupper,
    Björn-Olof Skytt,
    Felix Rios.
- Examination sker genom skriftlig tentamen den 1a juni.
  Examinator är Jimmy Olsson.

Tentamensinformation

- Tentamen består av 5 frågor, korrekt löst uppgift ger 10 poäng.
  - Normalt krävs 20 poäng för godkänt
  - **Preliminära** betygsgränser A 43, B 38, C 32, D 26, E 20.
  - **Preliminärt** komplettring för de som får 18-19 poäng.
- Tillåtna hjälpmedel vid tentamen
  - Mathematics Handbook (Beta)
  - Miniräknare (dock ej egen manual)
  - Institutionens manual till TI-82 Stats (Finns på kurshemsidan)
  - Formel- och tabellsamlingen (Finns på kurshemsidan)
- Obligatoriskt att anmäla sig till tentamen via Mina Sidor

Denna kurs

- I kursen behandlas tre olika områden, där alla är typer av stokastiska processer.
  - Markovkedjor: Stokastiska processer i diskret tid som rör sig utan minne, t.ex. slumpvandringar. Föreläsning 1 och 2
  - Markovprocesser: Stokastiska processer i kontinuerlig tid som rör sig utan minne, t.ex. Poissonprocessen. Föreläsning 3 och 4
  - Köteori: Applicering av markovprocesser på kö-system. Föreläsning 5 och 6

Föreläsningsplan

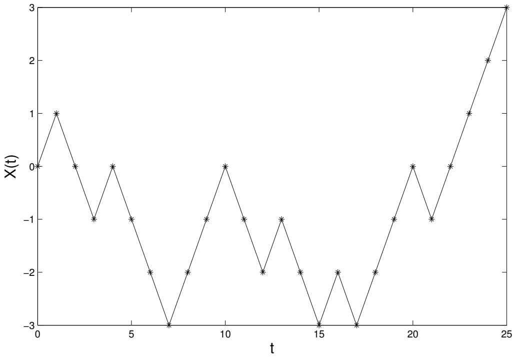
Stokastisk process

Definition

En familj av stokastiska variabler $\{X(t); t \in T\}$ kallas en stokastisk process.
Om $T = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ talat vi om **diskret** tid.
Om $T = [0, \infty) = \mathbb{R}_+$ talar vi om **kontinuerlig** tid.

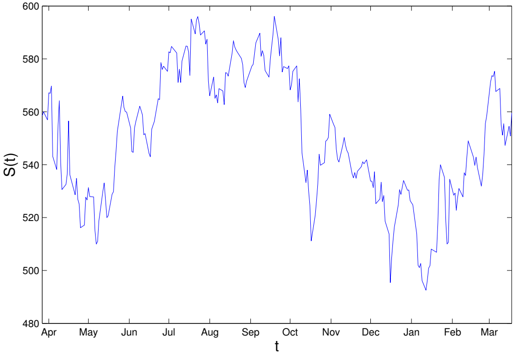
De värden som $X(t)$ kan anta kallas **tillståndsrummet**, betecknas **E**

Exempel 1, slumpvandring



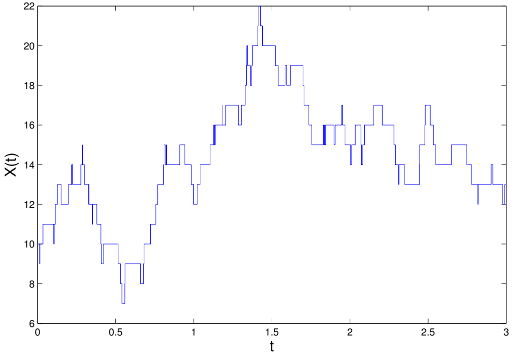
Figur: $X(t) = X(t-1) + \xi_t$, där ξ_t är 1 med sannolikhet 0.5 och -1 med sannolikhet 0.5

Exempel 2, aktiepris



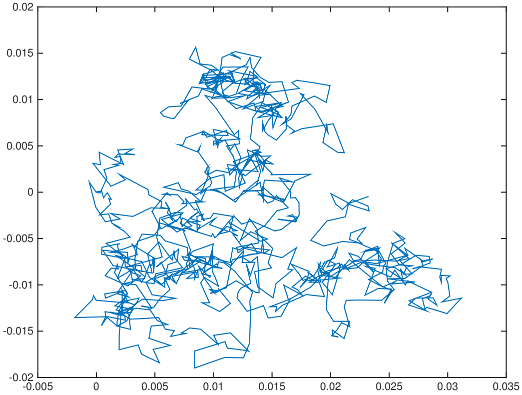
Figur: $S(t)$ är priset på Googles aktie i dollar. Data från Yahoo! Finance.

Exempel 3, populationstillväxt



Figur: $X(t)$, är populationsstorleken vid tidpunkt t.

Exempel 4, Brownsk rörselse



Figur: $X(t)$, är en Brownsk rörelse.

Föreläsningsplan

Repetition av betingade sannolikheter

Definition

Låt A och B vara två händelser och antag att $\mathbb{P}(B) > 0$. Då är den betingade sannolikheten för A givet B

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Lagen om total sannolikhet

Sats

Låt $H_1, H_2, \ldots$ vara en följd av ändligt många eller uppräkneligt många parvis disjunkta händelser vars union är hela utfallsrummet. Då gäller för en händelse A

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i).$$

Föreläsningsplan

Grundläggande begrepp

- Vi betraktar nu processer $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ i diskret tid som tar värden i ett ändligt (eller uppräkneligt) tillståndsrum **E**.
- Vi låter **E** vara en heltalsmängd;
  - $\mathbf{E} = \{1, 2, \ldots, N\}$, ändligt tillståndsrum.
  - $\mathbf{E} = \{1, 2, \ldots\}$, uppräkneligt tillståndsrum.

Definition (Markovegenskapen)

$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ är en **Markovkedja** om

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n),$$

för alla n och alla $i_0, \ldots, i_n \in \mathbf{E}$

Tidshomogenitet, Övergångssanolikheter och Övergångsmatris

Definition

Låt $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ vara en Markovkedja. Om de betingade sannolikheterna $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ inte beror på n (för alla $i, j \in \mathbf{E}$) sägs kedjan vara **tidshomogen**. I detta fall definierar vi **övergångssannolikheterna**

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i),$$

övergångsmatrisen P är matrisen vars element med index (i, j) är p_{ij}.

Exempel

Exempel (Sparka boll)

Kalle, Lisa och Mats sparkar boll tillsammans. Kalle passar till Lisa med sannolikheten 0.6 och till Mats med sannolikheten 0.4. Lisa passar till Kalle med sannolikheten 0.3 och till Mats med sannolikheten 0.7. Mats passar till Kalle med sannolikheten 0.4, till Lisa med sannolikheten 0.4 och till sig själv med sannolikheten 0.2.

Vi kan studera bollens position som en Markovkedja.

Tidsutveckling

- Vi har hittills studerat hopp efter ett tidssteg.
- Låt $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$, sannolikheten att gå från i till j i n steg.
- Vi kan då definiera övergångsmatrisen av ordning n, $\mathbf{P}^{(n)}$, som matrisen vars element med index (i, j) är $p_{ij}^{(n)}$.
- För $n = 0$ definierar vi $p_{ij}^{(0)} = 1$ om $i = j$ och $p_{ij}^{(0)} = 0$ om $i \neq j$, vi får då $\mathbf{P}^{(0)} = I$ enhetsmatrisen.

Fördelningsvektorn

Definition

Startfördelningen $\mathbf{p}^{(0)}$ är fördelningen för X_0 och den ges av vektorn

$$\mathbf{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)} \dots),$$

där $p_k^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = k)$. Fördelningen för X_n ges av vektorn

$$\mathbf{p}^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}, \dots),$$

där $p_k^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = k)$

Exempel

Exempel (Sparka boll fortsättning)

Kalle, Lisa och Mats sparkar boll tillsammans. Kalle passar till Lisa med sannolikheten 0.6 och till Mats med sannolikheten 0.4. Lisa passar till Kalle med sannolikheten 0.3 och till Mats med sannolikheten 0.7. Mats passar till Kalle med sannolikheten 0.4, till Lisa med sannolikheten 0.4 och till sig själv med sannolikheten 0.2.

Antag nu att Kalle börjar med bollen. Vad är sannolikheten att Lisa har bollen efter 2 passningar?

Chapman-Kolmogorov

Följande resultat är centralt för att kunna använda Markovkedjor.

Sats (Chapman-Kolmogorovs ekvationer, 3.1)

a) $p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in \mathbf{E}} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$

b) $\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)} \mathbf{P}^{(n)}$

c) $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$

d) $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{n}$

Exempel

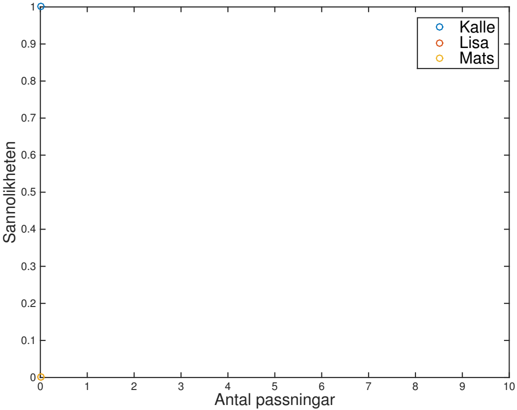
Exempel (Sparka boll fortsättning)

Kalle, Lisa och Mats sparkar boll tillsammans. Kalle passar till Lisa med sannolikheten 0.6 och till Mats med sannolikheten 0.4. Lisa passar till Kalle med sannolikheten 0.3 och till Mats med sannolikheten 0.7. Mats passar till Kalle med sannolikheten 0.4, till Lisa med sannolikheten 0.4 och till sig själv med sannolikheten 0.2.

Antag nu att Kalle börjar med bollen. Vad är sannolikheten att Lisa har bollen efter 4 passningar?

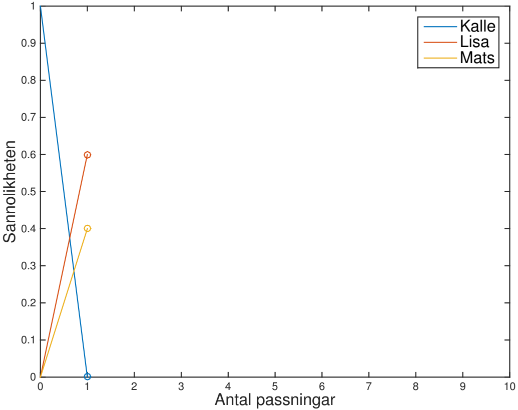
Vad händer efter "lång" tid?

Exempel fort.



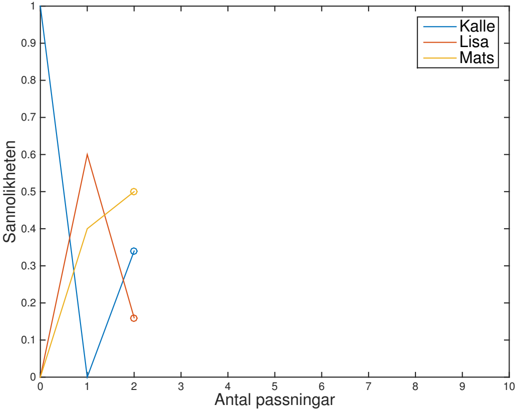
Figur: Fördelningen av bollens position i starten, $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0, 0)$.

Exempel fort.



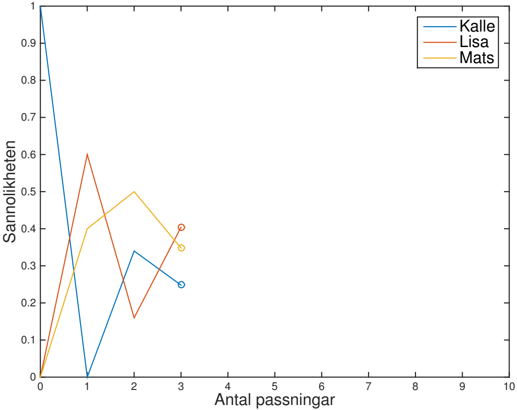
Figur: Fördelningen av bollens position efter en passning, $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P} = (0, 0.6, 0.4)$.

Exempel fort.



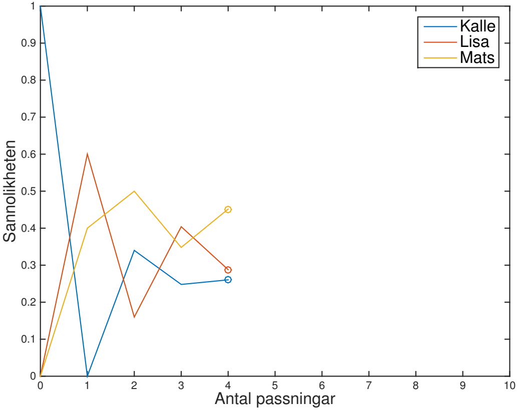
Figur: Fördelningen av bollens position efter två passningar, $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^2 = (0.34, 0.16, 0.5)$.

Exempel fort.



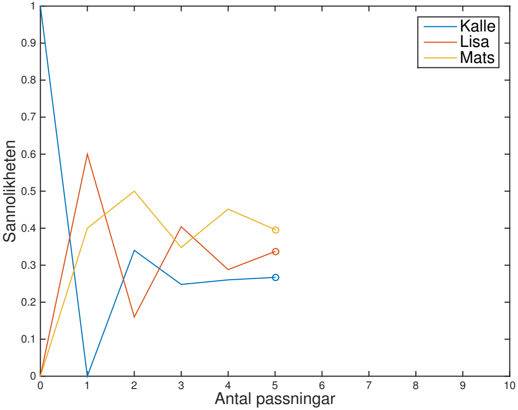
Figur: Fördelningen av bollens position efter två passningar, $\mathbf{p}^{(3)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^3 = (0.248, 0.404, 0.348)$.

Exempel fort.



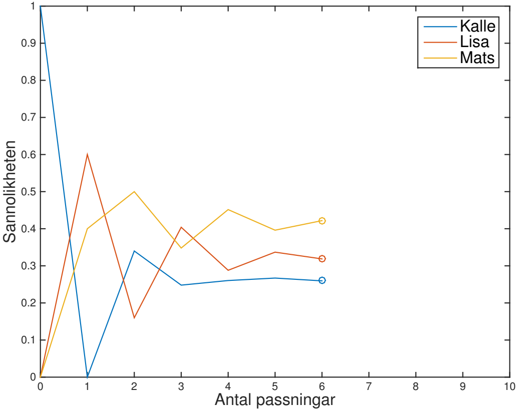
Figur: Fördelningen av bollens position efter fyra passningar, $\mathbf{p}^{(4)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^4 = (0.2604, 0.2880, 0.4516)$.

Exempel fort.



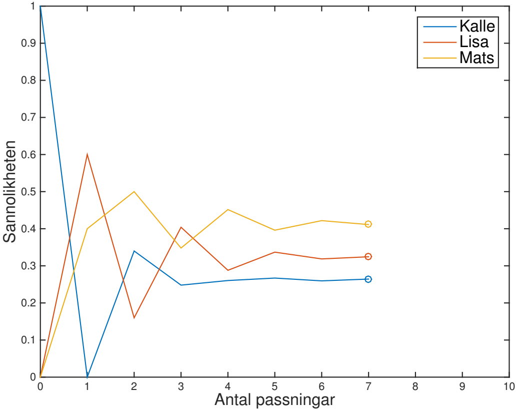
Figur: Fördelningen av bollens position efter fem passningar, $\mathbf{p}^{(5)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^5 = (0.267, 0.3369, 0.3961)$.

Exempel fort.



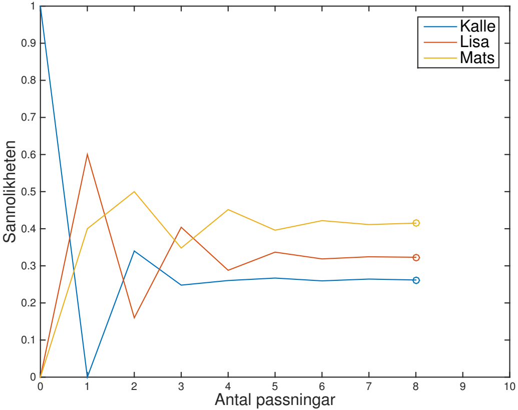
Figur: Fördelningen av bollens position efter sex passningar, $\mathbf{p}^{(6)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^6 = (0.2595, 0.3187, 0.4218)$.

Exempel fort.



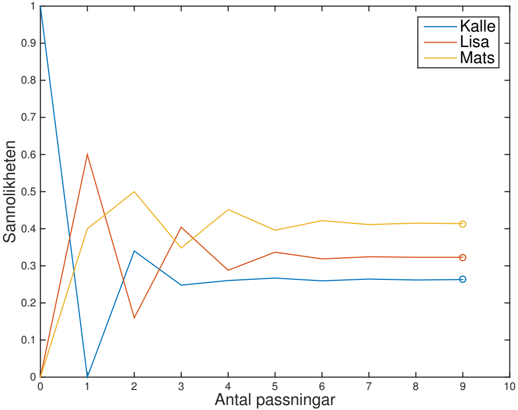
Figur: Fördelningen av bollens position efter sju passningar, $\mathbf{p}^{(7)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^7 = (0.2643, 0.3244, 0.4112)$.

Exempel fort.



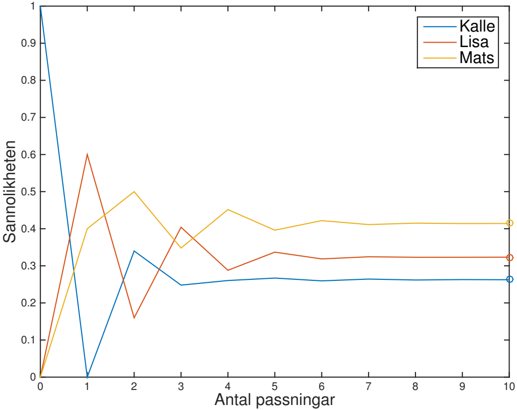
Figur: Fördelningen av bollens position efter åtta passningar, $\mathbf{p}^{(8)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{8} = (0.2618, 0.3231, 0.4151)$.

Exempel fort.



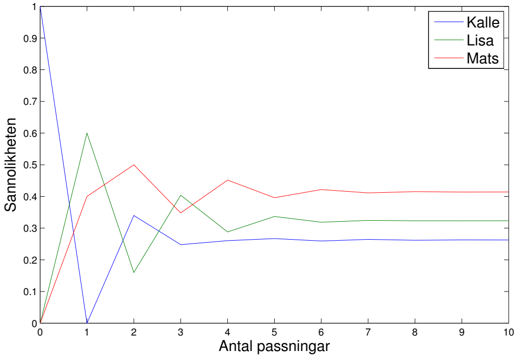
Figur: Fördelningen av bollens position efter nio passningar, $\mathbf{p}^{(9)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{9} = (0.263, 0.3231, 0.4139)$.

Exempel fort.



Figur: Fördelningen av bollens position efter tio passningar, $\mathbf{p}^{(10)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^{10} = (0.2625, 0.3233, 0.4142)$.

Exempel fort.



Figur: Fördelningen av bollens position efter ett visst antal passningar. Sannolikheten planar ut till vektorn $\pi = (\frac{26}{99}, \frac{32}{99}, \frac{41}{99})$

Stationär fördelning

Definition (Stationär fördelning, 5.1)

En fördelning $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ är en **stationär fördelning** till en Markovkedja med övergångsmatris **P** om

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \text{ för alla } i \in \mathbf{E}$$

Sats (5.1)

En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har alltid minst en stationär fördelning.

Föreläsningsplan

Klassificering av tillstånd

- Vi säger att tillstånd i leder till tillstånd j om det är möjligt att i ett ändligt antal steg komma från i till j.
- Ett tillstånd som bara leder till sig själv kallas för ett absorberande tillstånd.
  - Att tillstånd i är absorberande betyder att $p_{ii} = 1$.
- En Markovkedja kan ha inga, ett eller flera absorberande tillstånd.
- Intressanta frågor är:
  - Kommer vi hamna i ett absorberande tillstånd?
  - Hur lånd tid tar det innan vi hamnar där?
  - Om det finns flera, vad är sannolikheten att vi hamnar i ett specifikt absorberande tillstånd?

Klassificering av tillstånd

Definition (3.5)

En Markovkedja kallas **A-kedja** om varje tillstånd i antingen är absorberande eller leder till ett absorberande tillstånd.

Definition (3.6)

Ett tillstånd i som leder till ett tillstånd från vilket kedjan ej kan återvända till i kallas ett **genomgångstillstånd**

Tillståndsrummet $\mathbf{E}$ i en A-kedja kan alltså delas upp i en mängd av absorberande tillstånd $\mathbf{A}$ och en mängd genomgångstillstånd $\mathbf{G}$, $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cup \mathbf{G}$

Exempel

Exempel (Tärningsspel, uppg. 16)

A och B deltar i ett tärningsspel, som tillgår på följande sätt: Om tärningen visar 1 eller 2 så vinner kastaren, om den visar 3 får hen göra ytterligare ett kast. Visar tärningen 4 eller 5 får den andre kasta, och kommer 6 upp förlorar kastaren. Antag att A börjar kasta.

Ställ upp problemet och beräkna

a) *sannolikheten att B vinner.*

b) *väntevärdet för det antal spelomgångar som krävs för att avsluta spelet.*