Markovprocesser
SF1904

Johan Westerborn

johawes@kth.se

Föreläsning 2
Markovprocesser
4 April 2016

Föreläsningsplan

Föreläsningsplan

Diskret Markovkedja

- Vi betraktar nu processer $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ i diskret tid som tar värden i ett ändligt (eller uppräkneligt) tillståndsrum **E**.
- Vi låter **E** vara en heltalsmängd;
  - $\mathbf{E} = \{1, 2, \ldots, N\}$, ändligt tillståndsrum.
  - $\mathbf{E} = \{1, 2, \ldots\}$, uppräkneligt tillståndsrum.

Definition (Markovegenskapen)

$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ är en **Markovkedja** om

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n),$$

för alla n och alla $i_0, \ldots, i_n \in \mathbf{E}$

Tidshomogenitet, Övergångssanolikheter och Övergångsmatris

Definition

Låt $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ vara en Markovkedja. Om de betingade sannolikheterna $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ inte beror på n (för alla $i, j \in \mathbf{E}$) sägs kedjan vara **tidshomogen**. I detta fall definierar vi **övergångssannolikheterna**

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i),$$

övergångsmatrisen P är matrisen vars element med index (i, j) är p_{ij}.

Chapman-Kolmogorov

Följande resultat är centralt för att kunna använda Markovkedjor.

Sats (Chapman-Kolmogorovs ekvationer, 3.1)

a) $p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in \mathbf{E}} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$

b) $\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)} \mathbf{P}^{(n)}$

c) $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{n}$

d) $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^{n}$

Stationär fördelning

Definition (Stationär fördelning, 5.1)

En fördelning $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ är en **stationär fördelning** till en Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$ om

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \text{ för alla } i \in \mathbf{E}$$

Sats (5.1)

En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har alltid minst en stationär fördelning.

Föreläsningsplan

Klassificering av tillstånd

- Vi säger att tillstånd i leder till tillstånd j om det är möjligt att i ett ändligt antal steg komma från i till j.
- Ett tillstånd som bara leder till sig själv kallas för ett absorberande tillstånd.
  - Att tillstånd i är absorberande betyder att $p_{ii} = 1$.
- En Markovkedja kan ha inga, ett eller flera absorberande tillstånd.
- Intressanta frågor är:
  - Kommer vi hamna i ett absorberande tillstånd?
  - Hur lånd tid tar det innan vi hamnar där?
  - Om det finns flera, vad är sannolikheten att vi hamnar i ett specifikt absorberande tillstånd?

Klassificering av tillstånd

Definition (3.5)

En Markovkedja kallas **A-kedja** om varje tillstånd *i* antingen är absorberande eller leder till ett absorberande tillstånd.

Definition (3.6)

Ett tillstånd *i* som leder till ett tillstånd från vilket kedjan ej kan återvända till *i* kallas ett **genomgångstillstånd**

Tillståndsrummet $\mathbf{E}$ i en A-kedja kan alltså delas upp i en mängd av absorberande tillstånd $\mathbf{A}$ och en mängd genomgångstillstånd $\mathbf{G}$, $\mathbf{E} = \mathbf{A} \cup \mathbf{G}$

Exempel

Exempel (Tärningsspel, uppg. 16)

A och B deltar i ett tärningsspel, som tillgår på följande sätt: Om tärningen visar 1 eller 2 så vinner kastaren, om den visar 3 får hen göra ytterligare ett kast. Visar tärningen 4 eller 5 får den andre kasta, och kommer 6 upp förlorar kastaren. Antag att A börjar kasta. Ställ upp problemet och beräkna

a) *sannolikheten att B vinner.*

b) *väntevärdet för det antal spelomgångar som krävs för att avsluta spelet.*

Absorptionssannolikheterna

Sats (3.3)

Absorptionssannolikheterna a_{ij}, där a_{ij} är sannolikheten för absorption i tillstånd j givet start i tillstånd i i en ändlig Markovkedja, uppfyller för alla $j \in \mathbf{A}$ förljande ekvationssystem,

$$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in \mathbf{G}} p_{ik} a_{kj}, \qquad i \in \mathbf{G}.$$

$\sum_{j \in \mathbf{A}} a_{ij} = 1$, *dvs sannolikheten är 1 att kedjan absorberas, vilket tillstånd man än startar vid.*

Absorptionstiderna

Sats (3.4)

Låt i en Markovkedja T_i vara tiden tills kedjan absorberas vid start i tillstånd $i \in \mathbf{G}$. Låt även $t_i = \mathbb{E}[T_i]$ vara förväntade tiderna tills absorption vid start i tillstånd i. Då uppfyller dessa följande ekvationssystem,

$$t_i = 1 + \sum_{k \in \mathbf{G}} p_{ik} t_k, \qquad i \in \mathbf{G}.$$

Föreläsningsplan

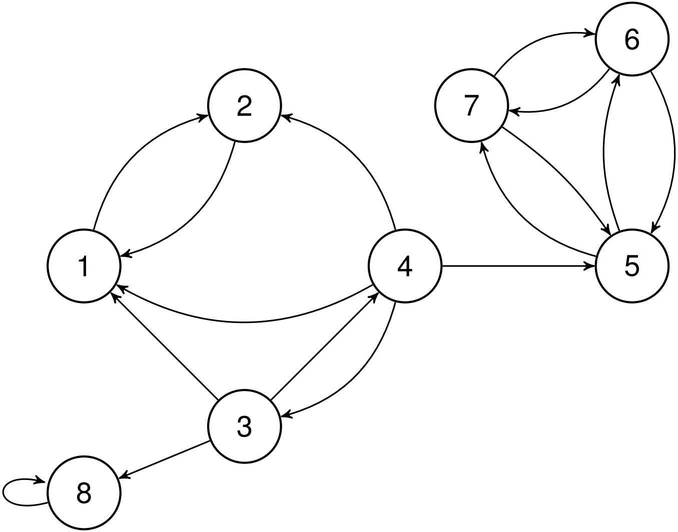
Kommunicerande tillstånd

Definition (4.1)

Ett tillstånd i sägs leda till tillstånd j om det är möjligt att gå från tillstånd i till j i noll, ett eller flera tidssteg, skrivs $i \to j$.
Två tillstånd sägs kommunicera om $i \to j$ och $j \to i$, skrivs $i \leftrightarrow j$

Egenskapen $\leftrightarrow$ definierar en ekvivalensrelation på tillstånden i en Markovkedja.

Exempel



Mer om klassificering av tillstånd

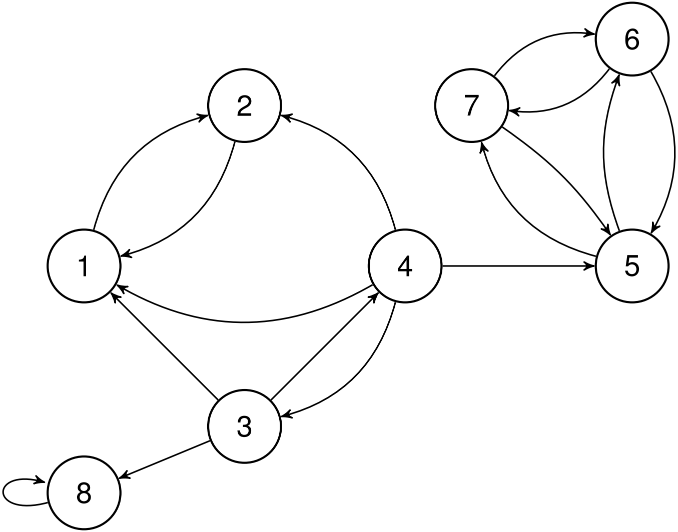
Definition (4.2)

En delmängd sägs vara sluten om inget tillstånd i leder ut från delmängden.

Definition (4.3)

En mängd av tillstånd vilka kommunicerar med varandra kallas en irreducibel tillståndsmängd.

Exempel

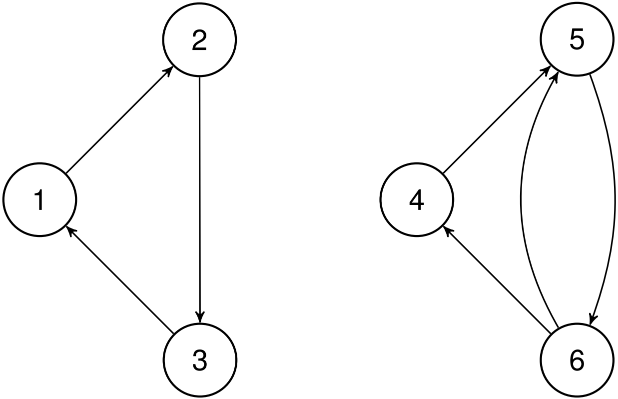


Period

Definition (4.4)

Låt D_i vara mängden av alla heltal n så att det är möjligt att från tillståndet i återvända till detta tillstånd i n tidssteg. Med period d_i menas den största gemensamma delaren till talen i D_i. Om $d_i = 1$ kallas i för aperiodisk.

Exempel



Föreläsningsplan

Stationär fördelnig

Påminner om definitionen

Definition (Stationär fördelning, 5.1)

En fördelning $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ är en **stationär fördelning** till en Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$ om

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

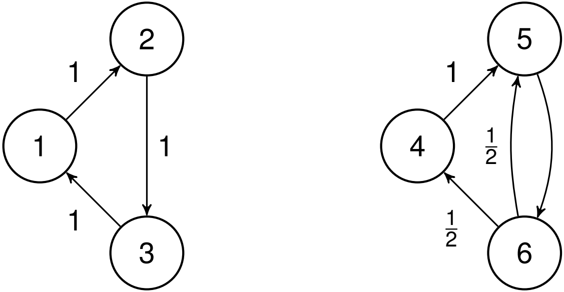
$$\pi_i \geq 0 \text{ för alla } i \in \mathbf{E}$$

Sats (5.1)

En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har alltid minst en stationär fördelning.

När hamnar vi i en stationär fördelning?

Betrakta de två Markovkedjorna nedan. Hur beter de sig efter lång tid?



En periodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Försök 1	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

En periodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Försök 1	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

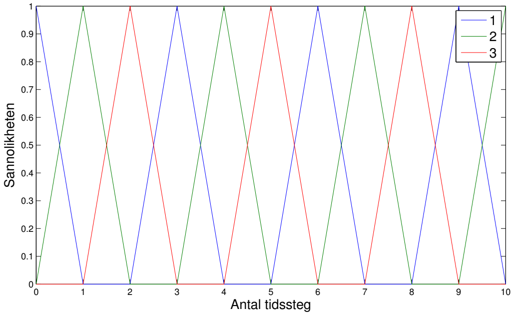
En periodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Försök 1	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

En periodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Försök 1	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 4	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 5	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 6	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 7	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 8	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
Försök 9	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2

En periodisk kedja



Figur: Fördelningsvektorer för olika tidssteg. Trots att stationär fördelning finns nås den aldrig.

En aperiodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Försök 1	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	4

En aperiodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Försök 1	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	4
Försök 2	4	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6

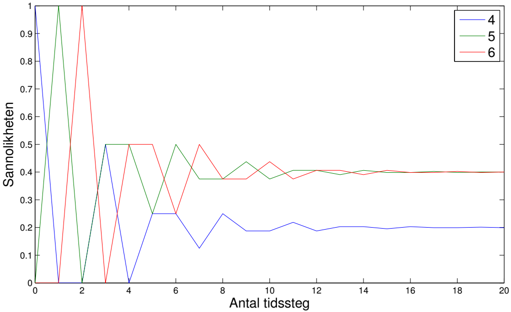
En aperiodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Försök 1	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	4
Försök 2	4	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
Försök 3	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	5	6	4	5

En aperiodisk kedja

Tid =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Försök 1	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	4
Försök 2	4	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
Försök 3	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	5	6	4	5
Försök 4	4	5	6	4	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6
Försök 5	4	5	6	5	6	4	5	6	5	6	5	6	5	6
Försök 6	4	5	6	5	6	4	5	6	5	6	4	5	6	5
Försök 7	4	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	5	6	5
Försök 8	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	5
Försök 9	4	5	6	5	6	4	5	6	4	5	6	5	6	4
Försök 10	4	5	6	5	6	5	6	4	5	6	5	6	5	6

En aperiodisk kedja



Figur: Fördelningsvektorer för olika tidssteg. Stationära fördelningen nås i detta fall.

Ergodicitet

Definition (5.2)

En Markovkedja $\{X_n; n \geq 0\}$ sägs vara ergodisk om en gränsfördelning $\mathbf{p}$ existerar och den är oberoende av startfördelning.

Följande sats är en av huvudsatserna i teorin för Markovkedjor

Sats (5.2)

En ändlig, irreducibel, aperiodisk Markovkedja är ergodisk och dess gränsfördelning är den entydiga, stationära fördelningen.

Exempel

Studera hur kedjan beter sig efter lång tid.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Typsik tentaformulering: Undersök om Markovkedjan har en asymptotisk fördelning och beräkna i så fall denna.

Icke irreducibelt exempel

Studera hur kedjan beter sig efter lång tid.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Beräkna $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_0 = j)$ för $i, j \in \mathbf{E}$.

Stationär fördelnig

Sats (5.3)

En ändlig, irreducibel kedja har en entydlig stationär fördelning π *och det gäller att* $\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}(T_i)}$ *där* T_i *är tiden mellan två besök i tillstånd* i*.*
Kvoten $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ *är förväntad tid i tillstånd* j *mellan två besök i tillstånd* i*.*

Exempel

Exempel

En lektor och småbarnsfar pendlar från dag till dag mellan tre tillstånd:
1 = pigg, 2 = trött, 3 = dödstrött
Tillstånden varierar som en Markovkedja med övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/5 & 3/10 \end{pmatrix}$$

Hur många dagar i snitt är det mellan varje dag lektorn är pigg?
Hur många av dessa dagar i snitt är lektorn dödstrött?

Ickeändlig Markovkedja

En ickeändlig Markovkedja kan också vara ergodisk och ha en stationär fördelning.

Sats (5.6)

Låt $\mathbf{P}$ *vara övergångsmatrisen till en irreducibel, aperiodisk Markovkedja. Betrakta följande ekvationssystem,* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{P}$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots$$

Då gäller att Markovkedjan är ergodisk och har en stationär fördelning om $0 < \sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$
Om lösningen satisfierar $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$ *så har kedjan ingen stationär fördelning och är inte ergodisk.*

Exempel

Exempel (5.5)

En partikel vandrar på de naturliga talen $\mathbb{N} = (0, 1, 2, \ldots)$ *och låt den gå ett steg till höger med sannolikhet* p *och ett steg till vänster med sannolikhet* $q = 1 - p$. *I punkten 0 stannar partikeln kvar med sannolikhet* q. *Avgör för vilka värden på* p *som kedjan är ergodisk och beräkna då den stationära fördelningen.*