Markovprocesser
SF1904

Johan Westerborn

johawes@kth.se

Föreläsning 3
Markovprocesser
13 April 2016

Föreläsningsplan

Föreläsningsplan

Diskret Markovkedja

- Har hittills pratat om diskreta Markovkedjor $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Definerade genom en initialfördelning $\mathbf{p}^{(0)}$ och en övergångsmatris $\mathbf{P}$.
- Intressant fråga är vad som händer efter lång tid.
- Definitioner att komma ihåg:
  - Genomgångstillstånd
  - Absorberande tillstånd
  - A-kedja
  - Irreducibel delmängd
  - Periodicitet
    - Aperiodiskt tillstånd
  - Sluten delmängd

Stationär fördelning

Definition (Stationär fördelning, 5.1)

En fördelning $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ är en **stationär fördelning** till en Markovkedja med övergångsmatris $\mathbf{P}$ om

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

$$\pi_i \geq 0 \text{ för alla } i \in \mathbf{E}$$

Sats (5.1)

En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har alltid minst en stationär fördelning.

Ergodicitet

Definition (5.2)

En Markovkedja $\{X_n; n \geq 0\}$ sägs vara ergodisk om en gränsfördelning $\mathbf{p}^{(\infty)}$ existerar och den är oberoende av startfördelning.

Följande sats är en av huvudsatserna i teorin för Markovkedjor

Sats (5.2)

En ändlig, irreducibel, aperiodisk Markovkedja är ergodisk och dess gränsfördelning är den entydiga, stationära fördelningen.

Stationär fördelnig

Sats (5.3)

En ändlig, irreducibel kedja har en entydlig stationär fördelning π *och det gäller att* $\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}(T_i)}$ *där* T_i *är tiden mellan två besök i tillstånd* i*. Kvoten* $\frac{\pi_j}{\pi_i}$ *är förväntad tid i tillstånd* j *mellan två besök i tillstånd* i*.*

Ickeändlig Markovkedja

En ickeändlig Markovkedja kan också vara ergodisk och ha en stationär fördelning.

Sats (5.6)

Låt $\mathbf{P}$ *vara övergångsmatrisen till en irreducibel, aperiodisk Markovkedja. Betrakta följande ekvationssystem,* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\mathbf{P}$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots$$

Då gäller att Markovkedjan är ergodisk och har en stationär fördelning om $0 < \sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$
Om lösningen satisfierar $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = \infty$ *så har kedjan ingen stationär fördelning och är inte ergodisk.*

Exempel

Exempel (5.5)

En partikel vandrar på de naturliga talen $\mathbb{N} = (0, 1, 2, \ldots)$ *och låt den gå ett steg till höger med sannolikhet p och ett steg till vänster med sannolikhet* $q = 1 - p$. *I punkten 0 stannar partikeln kvar med sannolikhet q. Avgör för vilka värden på p som kedjan är ergodisk och beräkna då den stationära fördelningen.*

Föreläsningsplan

Introduktion

Vi ska nu studera fallet då $T = [0, \infty)$ men tillståndsrummet är fortfarande diskret $\mathbf{E} = \{0, , 1 \dots , N\}$ eller uppräkneligt $\mathbf{E} = \{0, 1, \dots\}$.

Definition (6.1)

En stokastisk process $\{X(t), t \geq 0\}$ kallas en (diskret) Markovprocess om

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n, \dots , X(t_0) = i_0) \\ = \mathbb{P}(X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n), \end{aligned}$$

för alla n, alla $0 \leq t_0 < \dots < t_n < t_{n+1}$ och alla tillstånd $i_0, \dots , i_n, i_{n+1} \in \mathbf{E}$.

Tidshomogen

Definition

Om $\mathbb{P}(X(t+s) = j \mid X(s) = i)$, $i, j \in \mathbf{E}$ inte beror på s så är processen **tidshomogen.**

Vi kan då sätta

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = \mathbb{P}(X(t) = j \mid X(0) = i)$$

och

$$\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in\mathbf{E}}.$$

$\mathbf{P}(t)$ är övergångsmatris för tid t.
$\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots)$ där $p_i(t) = \mathbb{P}(X(t) = i)$, där $\mathbf{p}(t)$ är den absoluta sannolikhetsfördelningen.

Chapman-Kolmogorov

Sats (6.1)

För alla $s, t \geq 0$ *gäller*

a) $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathbf{E}} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$

b) $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$

c) $\mathbf{p}(s+t) = \mathbf{p}(s)\mathbf{P}(t)$

Bevis lämnas som en bra övning. Görs på samma sätt som för diskreta Markovkedjor.

Reguljär Markovprocess

Definition (6.2)

En Markovprocess kallas **reguljär** om den med sannolikhet 1 gör högst ändligt många hopp under ändliga tidsintervall och med sannolikhet 1 ligger kvar en positiv tid i ett tillstånd den gått in i.

Exponentialfördelningen

Tiden i ett tillstånd är exponentialfördelad

Låt T_i vara en stokastisk variabel som är tiden mellan hopp $i-1$ och i i en Markovprocess. Då gäller enligt Markovegenskapen att

$$\mathbb{P}\left(T_i > h + s \mid T_i > s\right) = \mathbb{P}\left(T_i > h\right).$$

Fördelningen som uppfyller detta är Exponentialfördelningen.

Vi drar slutsatsen att hopptiden i en tidshomogen Markovprocess är Exponentialfördelade.

Sats

Låt $T_i \sim Exp(\lambda_i)$ för $i = 1, \ldots, n$. Då är $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$ exponentialfördelad med intensitet $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Föreläsningsplan

Intensitetsmatrisen

Definition

Antag att $p_{ij}(t)$ är två gånger differntierbar från höger i nollen, dvs. det existerar $q_{ij} \in \mathbb{R}$ så att

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}.$$

Matrisen $\mathbf{Q}$ med elementet q_{ij} på plats (i, j) kallas för intensitetsmatrisen.

Exempel (Exponentialfördelningen igen)

Om en Markovprocess hoppar från tillstånd 0 till 1 efter en Exp(λ) fördelad tid. Då är $q_{01} = \lambda$.

Intensitetsmatrisen

Definition

Antag att $p_{ij}(t)$ är två gånger differntierbar från höger i nollen, dvs. det existerar $q_{ij} \in \mathbb{R}$ så att

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}.$$

Matrisen $\mathbf{Q}$ med elementet q_{ij} på plats (i, j) kallas för intensitetsmatrisen.

Exempel (Exponentialfördelningen igen)

Om en Markovprocess hoppar från tillstånd 0 till 1 efter en Exp(λ) *fördelad tid. Då är* $q_{01} = \lambda$.

Tolkning av q_{ij}

Tillsammans med tidshomogeniteten får vi nu, för alla $t \geq 0$ och $i \neq j$,

$$\mathbb{P}(X(t+h) = j \mid X(t) = i) = q_{ij}h + o(h)$$

q_{ij} kallas för övergångsintensiteten från tillstånd i till j.
Vi har också att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t+h) \neq i \mid X(t) = i) &= \sum_{j \neq i} \mathbb{P}(X(t+h) = j \mid X(t) = i) \\ &= \sum_{j \neq i} (q_{ij}h + o(h)) = q_i h + o(h)\end{aligned}$$

Där q_i kallas för uthoppsintensiteten,

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

Tolkning av q_{ii}

Observera också att

$$p_{ii}(h) = \mathbb{P}(X(h) = i \mid X(0) = i) = 1 - \mathbb{P}(X(h) \neq i \mid X(0) = i)$$
$$= 1 - (q_i h + o(h)) = 1 - q_i h + o(h).$$

Vi får då att

$$\begin{aligned} q_{ii} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0^+} \frac{q_i h + o(h)}{h} \\ &= -q_i \end{aligned}$$

Vi har att $q_{ii} = -q_i$. Vi drar slutsatsen att radsumman i $\mathbf{Q}$ är noll.

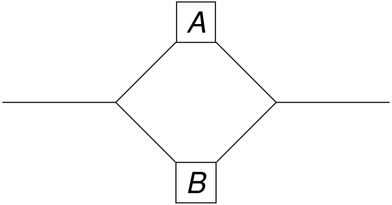
Sammanfattning

- Vi kan tolka en Markovprocess som att när vi kommer till ett tillstånd i startar vi exponentialfördelade variabler $T_{ij} \sim Exp(q_{ij}), j \neq i$.
- Vi hoppar till det tillstånd j som har $T_{ij} \leq T_{i\ell}, \ell \neq i$
- Formeln $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ är naturlig då tiden till ett hopp är exponentialfördelad och minimum av exponentialfördelade variabler är exponentialfördelad med intensitet som är summan av intensiteterna.
- Tiden i ett tillstånd är alltså $Exp(q_i)$ fördelad.

Tillförlitlighet

Exempel (Tillförlitlighet)

En maskin består av två komponenter, A och B som är parallellkopplade. De går sönder oberoende av varandra med intenistet λ. När en komponent är trasig lagas den med intensitet μ. Man har tillgång till två reperatörer så alla komponenter kan repareras parallellt. Man är intresserad av att veta om systemet fungerar eller ej. Ställ upp systemet, bestäm **E** *och* **Q**.



Bakåt och framåt ekvationerna

- I matrisform kan vi skriva intensitetsmatrisen som

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}$$

- Vi kan då skriva upp följande ekvationer

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

- Första ekvationerna kallas för Kolmogorovs framåt och bakåt ekvationer. De har lösningen

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$$

- Matrisen $\mathbf{Q}$ tillsammans med $\mathbf{p}(0)$ karakteriserar Markovprocessen.

Föreläsningsplan

Uthoppsmatrisen

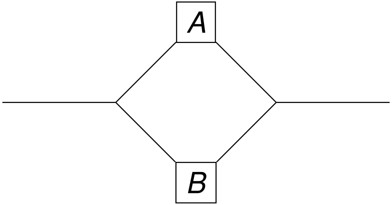
- Låt $t_0, t_1, \ldots$ vara tidpunkterna då Markovprocessen $\{X(t); t \geq 0\}$ med intensitetsmatris $\mathbf{Q}$ hoppar.
- Vi låter $\{\tilde{X}_n; n = 0, 1, \ldots\}$ vara en process där $\tilde{X}_n = X(t_n)$.
- Då är $\tilde{X}_n$ en Markovkedja med övergångsmatris $\tilde{\mathbf{P}}$.
- Där övergångssannolikheterna är proportionella mot intensiteterna.
- Bra övning att visa följande:
  Låt $T_1 \sim Exp(\lambda_1)$ och $T_2 \sim Exp(\lambda_2)$ då är

$$\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Tillförlitlighet forts.

Exempel (Tillförlitlighet)

En maskin består av två komponenter, A och B som är parallellkopplade. De går sönder oberoende av varandra med intenistet λ. När en komponent är trasig lagas den med intensitet μ. Man har tillgång till två reperatörer så alla komponenter kan repareras parallellt. Man är intresserad av att veta om systemet fungerar eller ej. Bestäm $\tilde{\mathbf{P}}$.



Att simulera en Markovprocess

Med den inbäddade Markovkedjan är det enkelt att simulera en Markovprocess på följande sätt:

Låt $\tilde{X}(0) = X(0) \leftarrow i$ med sannolikhet $p_i(0)$;
Låt $T_0 \leftarrow 0$;
for $n = 1, 2, \ldots$ **do**
  Låt $Y_n \sim Exp(q_{\tilde{X}_{n-1}})$;
  Låt $T_n \leftarrow T_{n-1} + Y_n$;
  Låt $\tilde{X}_n = X(T_n) \leftarrow j$ med sannolikhet $q_{\tilde{X}_{n-1},j}/q_{\tilde{X}_{n-1}}$;
end

Där $X(t)$ är Markovprocessen, $\tilde{X}_n$ är den innbäddade Markovkedjan och T_n är tiden för hopp n.

Föreläsningsplan

Absorption i Markovprocesser

- Ett absorberande tillstånd är ett tillstånd från vilket man ej kan gå till ett annat tillstånd.
- Det betyder att $q_{ij} = 0$ för alla $j \neq i$, vilket också betyder att $q_i = -q_{ii} = 0$ för ett absorberande tillstånd i (rad av nollor i $\mathbf{Q}$).
- Begreppet **A-kedja**, **genomgångstillstånd** defineras som i Markovkedjorna.
- Vi inför som i Markovkedje fallet, $a_{ij} = \mathbb{P}(\text{absorberas i tillstånd } j \mid X(0) = i)$
- $T_i =$tid till absorption givet start i tillstånd i och $t_i = \mathbb{E}[T_i]$.
- Vi kan beräkna dessa på samma sätt som i Markokedjorna om vi inser att förväntad tid i tillstånd i är $\frac{1}{q_i}$ och använder den innbäddade Markovkedjan.

Absorption i Markovprocesser

Sats (6.5)

Låt a_{ij} vara absorptionssannolikheterna och t_i vara förväntad tid till absorption i en A-kedja med intensitetsmatris $\mathbf{Q}$. Då gäller för alla absorberande tillstånd j

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} + \sum_{k \in \mathbf{G} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} a_{kj}, \quad i \in \mathbf{G}$$

$$t_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{k \in \mathbf{G} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} t_k, \quad i \in \mathbf{G}$$

där $\mathbf{G}$ är alla genomgångstillstånd.

Bevisas på samma sätt som för Markovkedjor.

Tillförlitlighet forts.

Exempel (Tillförlitlighet)

En maskin består av två komponenter, A och B som är parallellkopplade. De går sönder oberoende av varandra med intenistet λ. När en komponent är trasig lagas den med intensitet μ. Man har tillgång till två reperatörer så alla komponenter kan repareras parallellt. Man är intresserad av att veta om systemet fungerar eller ej. Antag att systemet börjar med två fungerande komponenter, hur lång tid förväntar vi oss att det tar innan systemet slutar fungera?