Markovprocesser
SF1904

Johan Westerborn

johawes@kth.se

Föreläsning 4
Markovprocesser
20 April 2015

Föreläsningsplan

Föreläsningsplan

1. Förra Föreläsningen
2. Innbäddade Markovkedjan
3. Absorption
4. Stationär fördelning
5. Poissonprocessen

Intro till Markovprocesser

- Vi studerar nu Markovprocesser, vilket är en stokastisk process i kontinuerlig tid.
- Många definitioner är snarlika motsvarande definitioner för Markovkedjor.
- $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X(t) = j \mid X(0) = i)$ och $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))_{ij}$.
- Chapman-Kolmogorovs ekvationer finns på motsvarande sätt som i Markovkedjor.
- Tiden mellan hopp måste vara strikt större än noll (reguljär Markovprocess).
- Tiden mellan hopp är Exponentialfördelad då det är den enda (kontinuerliga) fördelningen som saknar minne.

Intensitetsmatrisen

- Intensitetsmatrisen $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{ij}$ introducerades där:
  - Elementet på plats i, j defineras som
$$q_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}.$$
  - q_{ij} för $j \neq i$ är intensiteten med vilken processen rör sig från tillstånd i till j.
  - $q_i = \sum_{i \neq j} q_{ij}$ är uthoppsintensiteten för tillstånd i.
  - $q_{ii} = -q_i$ är diagnoalelementen.
- Radsumman i $\mathbf{Q}$ är noll.
- I Markovkedjorna karaktäriserar vi processen med hjälp av $\mathbf{P}$ och $\mathbf{p}^{(0)}$. Vad gäller för Markovprocesserna?

Intensitetsmatrisen

- Intensitetsmatrisen $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{ij}$ introducerades där:
  - Elementet på plats i, j defineras som
  $$q_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}.$$
  - q_{ij} för $j \neq i$ är intensiteten med vilken processen rör sig från tillstånd i till j.
  - $q_i = \sum_{i \neq j} q_{ij}$ är uthoppsintensiteten för tillstånd i.
  - $q_{ii} = -q_i$ är diagnoalelementen.
- Radsumman i $\mathbf{Q}$ är noll.
- I Markovkedjorna karaktäriserar vi processen med hjälp av $\mathbf{P}$ och $\mathbf{p}^{(0)}$. Vad gäller för Markovprocesserna?

Bakåt och framåt ekvationerna

- I matrisform kan vi skriva intensitetsmatrisen som

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}$$

- Vi kan då skriva upp följande ekvationer

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

- Första ekvationerna kallas för Kolmogorovs framåt och bakåt ekvationer. De har lösningen

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$$

- Matrisen $\mathbf{Q}$ tillsammans med $\mathbf{p}(0)$ karakteriserar Markovprocessen.

Bakåt och framåt ekvationerna

- I matrisform kan vi skriva intensitetsmatrisen som

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}$$

- Vi kan då skriva upp följande ekvationer

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

- Första ekvationerna kallas för Kolmogorovs framåt och bakåt ekvationer. De har lösningen

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$$

- Matrisen $\mathbf{Q}$ tillsammans med $\mathbf{p}(0)$ karakteriserar Markovprocessen.

Bakåt och framåt ekvationerna

- I matrisform kan vi skriva intensitetsmatrisen som

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}$$

- Vi kan då skriva upp följande ekvationer

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

- Första ekvationerna kallas för Kolmogorovs framåt och bakåt ekvationer. De har lösningen

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$$

- Matrisen $\mathbf{Q}$ tillsammans med $\mathbf{p}(0)$ karakteriserar Markovprocessen.

Bakåt och framåt ekvationerna

- I matrisform kan vi skriva intensitetsmatrisen som

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}$$

- Vi kan då skriva upp följande ekvationer

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(0)\mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q}$$

- Första ekvationerna kallas för Kolmogorovs framåt och bakåt ekvationer. De har lösningen

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q}t)^k}{k!}$$

- Matrisen $\mathbf{Q}$ tillsammans med $\mathbf{p}(0)$ karakteriserar Markovprocessen.

Föreläsningsplan

1. Förra Föreläsningen
2. Innbäddade Markovkedjan
3. Absorption
4. Stationär fördelning
5. Poissonprocessen

Uthoppsmatrisen

- Låt $t_0, t_1, \ldots$ vara tidpunkterna då Markovprocessen $\{X(t); t \geq 0\}$ med intensitetsmatris $\mathbf{Q}$ hoppar.
- Vi låter $\{\tilde{X}_n; n = 0, 1, \ldots\}$ vara en process där $\tilde{X}_n = X(t_n)$.
- Då är $\tilde{X}_n$ en Markovkedja med övergångsmatris $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{p}_{ij})$.
- Där övergångssannolikheterna är proportionella mot intensiteterna,
$$\tilde{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$
- Bra övning att visa följande:
Låt $T_1 \sim Exp(\lambda_1)$ och $T_2 \sim Exp(\lambda_2)$ då är
$$\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Uthoppsmatrisen

- Låt $t_0, t_1, \dots$ vara tidpunkterna då Markovprocessen $\{X(t); t \geq 0\}$ med intensitetsmatris $\mathbf{Q}$ hoppar.
- Vi låter $\{\tilde{X}_n; n = 0, 1, \dots\}$ vara en process där $\tilde{X}_n = X(t_n)$.
- Då är $\tilde{X}_n$ en Markovkedja med övergångsmatris $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{p}_{ij})$.
- Där övergångssannolikheterna är proportionella mot intensiteterna,
$$\tilde{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$
- Bra övning att visa följande:
Låt $T_1 \sim Exp(\lambda_1)$ och $T_2 \sim Exp(\lambda_2)$ då är
$$\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

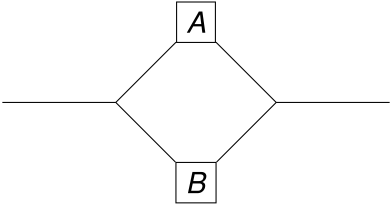
Uthoppsmatrisen

- Låt $t_0, t_1, \ldots$ vara tidpunkterna då Markovprocessen $\{X(t); t \geq 0\}$ med intensitetsmatris **Q** hoppar.
- Vi låter $\{\tilde{X}_n; n = 0, 1, \ldots\}$ vara en process där $\tilde{X}_n = X(t_n)$.
- Då är $\tilde{X}_n$ en Markovkedja med övergångsmatris $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{p}_{ij})$.
- Där övergångssannolikheterna är proportionella mot intensiteterna,
$$\tilde{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$
- Bra övning att visa följande:
Låt $T_1 \sim Exp(\lambda_1)$ och $T_2 \sim Exp(\lambda_2)$ då är
$$\mathbb{P}(T_1 < T_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Tillförlitlighet forts.

Exempel (Tillförlitlighet)

En maskin består av två komponenter, A och B som är parallellkopplade. De går sönder oberoende av varandra med intenistet λ. När en komponent är trasig lagas den med intensitet μ. Man har tillgång till två reperatörer så alla komponenter kan repareras parallellt. Man är intresserad av att veta om systemet fungerar eller ej. Bestäm $\tilde{\mathbf{P}}$.



Att simulera en Markovprocess

Med den inbäddade Markovkedjan är det enkelt att simulera en Markovprocess på följande sätt:

Låt $\tilde{X}(0) = X(0) \leftarrow i$ med sannolikhet $p_i(0)$;
Låt $T_0 \leftarrow 0$;
for $n = 1, 2, \ldots$ **do**
  Låt $Y_n \sim Exp(q_{\tilde{X}_{n-1}})$;
  Låt $T_n \leftarrow T_{n-1} + Y_n$;
  Låt $\tilde{X}_n = X(T_n) \leftarrow j$ med sannolikhet $q_{\tilde{X}_{n-1},j}/q_{\tilde{X}_{n-1}}$;
end

Där $X(t)$ är Markovprocessen, $\tilde{X}_n$ är den innbäddade Markovkedjan och T_n är tiden för hopp n.

Föreläsningsplan

Absorption i Markovprocesser

- Ett absorberande tillstånd är ett tillstånd från vilket man ej kan gå till ett annat tillstånd.
- Det betyder att $q_{ij} = 0$ för alla $j \neq i$, vilket också betyder att $q_i = -q_{ii} = 0$ för ett absorberande tillstånd i (rad av nollor i $\mathbf{Q}$).
- Begreppet **genomgångstillstånd** och **A-kedja** defineras som hos Markovkedjorna.
- Vi inför, analogt med Markovkedjorna, $a_{ij} = \mathbb{P}(\text{absorberas i tillstånd } j \mid X(0) = i)$,
- och T_i som tid till absorption givet start i tillstånd i och $t_i = \mathbb{E}[T_i]$.
- Vi kan beräkna dessa på samma sätt som i Markokedjorna om vi inser att förväntad tid i tillstånd i är $\frac{1}{q_i}$ och använder den innbäddade Markovkedjan.

Absorption i Markovprocesser

Sats (6.5)

Låt a_{ij} vara absorptionssannolikheterna och t_i vara förväntad tid till absorption i en A-kedja med intensitetsmatris $\mathbf{Q}$. *Då gäller för alla absorberande tillstånd j*

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} + \sum_{k \in \mathbf{G} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} a_{kj}, \quad i \in \mathbf{G}$$

$$t_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{k \in \mathbf{G} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} t_k, \quad i \in \mathbf{G}$$

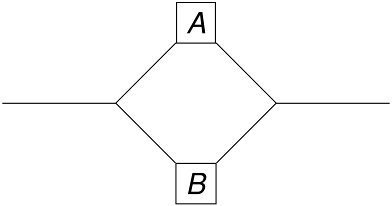
där $\mathbf{G}$ *är alla genomgångstillstånd.*

Bevisas på samma sätt som för Markovkedjor.

Tillförlitlighet forts.

Exempel (Tillförlitlighet)

En maskin består av två komponenter, A och B som är parallellkopplade. De går sönder oberoende av varandra med intenistet λ. När en komponent är trasig lagas den med intensitet μ. Man har tillgång till två reperatörer så alla komponenter kan repareras parallellt. Man är intresserad av att veta om systemet fungerar eller ej. Antag att systemet börjar med två fungerande komponenter, hur lång tid förväntar vi oss att det tar innan systemet slutar fungera?



Föreläsningsplan

Stationär fördelning

- En Markovprocess kan precis som en Markovkedja ha en stationär fördelning.
- Låt π vara en stationär fördelning, då måste

$$\pi = \pi \mathbf{P}(t), \quad t \geq 0$$

- Derivera uttrycket och vi får

$$0 = \pi \mathbf{Q}$$

- Löst uttryckt, detta betyder att i en stationär fördelning är nettoförändringen noll.
- Frågor som kvarstår är:
  - Kommer vi hamna i en stationära fördelningen?
  - Är den stationära fördelningen entydig?

Stationär fördelning

- En Markovprocess kan precis som en Markovkedja ha en stationär fördelning.
- Låt π vara en stationär fördelning, då måste

$$\pi = \pi \mathbf{P}(t), \quad t \geq 0$$

- Derivera uttrycket och vi får

$$0 = \pi \mathbf{Q}$$

- Löst uttryckt, detta betyder att i en stationär fördelning är nettoförändringen noll.
- Frågor som kvarstår är:
  - Kommer vi hamna i en stationära fördelningen?
  - Är den stationära fördelningen entydig?

Global balans

Sats (6.6)

π är en stationär fördelning till en reguljär Markovprocess med tillståndsrum $\mathbf{E}$ om och endast om $\pi\mathbf{Q} = 0$. Denna ekvation kan skrivas som

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i q_{ij} &= 0, \quad \forall j \in \mathbf{E} \\ \sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i &= 1, \\ \pi_i &\geq 0, \quad \forall i \in \mathbf{E}. \end{aligned}$$

*Första ekvationen kallas för **global balans**.*

Lokal balans

Definition (Lokal balans)

En sannolikhetsfördelning π uppfyller **lokal balans** om

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}, \quad \forall i, j \in \mathbf{E}$$

- $\pi_i q_{ij}$ kan benämnas med flödet från i till j.
- Vid lokal balans är flödet från i till j lika med flödet från j till i.
- Om π uppfyller lokal balans uppfyller den också global balans $\Rightarrow$ π är en stationär fördelning.
- Alla stationära fördelningar uppfyller **inte** lokal balans.

Ergodicitet

Sats (6.8)

En ändlig, irreducibel Markovprocess $\{X(t); t \geq 0\}$ är ergodisk och gränsfördelningen är den entydiga stationära fördelningen π. Kvoten $\pi_i = \frac{1/q_i}{\mathbb{E}[T_i]}$ där T_i är återkomsttiden för tillstånd i. Förväntad tid i tillstånd j mellan två besök i tillstånd i är $\pi_j/(q_i\pi_i)$.

Tillförlitlighet forts.

Exempel (Tillförlitlighet)

En maskin består av två komponenter, A och B som är parallellkopplade. De går sönder oberoende av varandra med intenistet $\lambda = \frac{1}{2}$*. När en komponent är trasig lagas den med intensitet* $\mu = 2$*. Man har tillgång till två reperatörer så alla komponenter kan repareras parallellt. Man är intresserad av att veta om systemet fungerar eller ej.*

Antag att maskinen producerar 4 enheter per tidsenhet när allt fungerar och 3 enheter per tidsenhet när bara ena fungerar. Vad är den förväntade produktionen när man kollar långt in i framtiden? Om manskinen är trasig, hur många enheter förväntas tillverkas innan maskinen är trasig igen?

Föreläsningsplan

Poissonprocessen

- En speciell Markovprocess som används flitigt inom många olika områden är Poissonprocessen.
- Används ofta när man vill räkna händelser:
  - Ankomster till en affär.
  - Radioaktivt sönderfall.
  - Olyckor.

Definition (6.5)

Poissonprocessen $\{N(t), t \geq 0\}$ är en Markovprocess med uppräkneligt tillståndsrum, $N(0) = 0$ med följande övergångsintensiteter

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i + 1 \\ -\lambda & j = i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Poissonprocessen

Sats (6.3)

Följande definitioner är ekvivalenta.

a) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en Poissonprocess.*

b) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en Markovprocess med* $N(0) = 0$ *och övergångssannolikheter*

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \text{ om } j \geq i$$

c) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en stokastisk process sådan att*

1) *För alla* $0 \leq s_1 < t_1 \leq \ldots \leq s_n < t_n$ *är* $N(t_1) - N(s_1), N(t_2) - N(s_2), \ldots, N(t_n) - N(s_n)$ *oberoende stokastiska variabler.*
2) $N(t) - N(s)$ *är* $Po(\lambda(t-s))$ *fördelad.*
3) $N(0) = 0$.