Markovprocesser
SF1904

Johan Westerborn

johawes@kth.se

Föreläsning 6
Markovprocesser
7 Maj 2015

Föreläsningsplan

1. Förra Föreläsningen
2. Köteori

Föreläsningsplan

Poissonprocessen

- En speciell Markovprocess som används flitigt inom många olika områden är Poissonprocessen.
- Används ofta när man vill räkna händelser:
  - Ankomster till en affär.
  - Radioaktivt sönderfall.
  - Olyckor.

Definition (6.5)

Poissonprocessen $\{N(t), t \geq 0\}$ är en Markovprocess med uppräkneligt tillståndsrum, $N(0) = 0$ med följande övergångsintensiteter

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i+1 \\ -\lambda & j = i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Poissonprocessen

Sats (6.3)

Följande definitioner är ekvivalenta.

a) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en Poissonprocess.*

b) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en Markovprocess med* $N(0) = 0$ *och övergångssannolikheter*

$$p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}, \text{ om } j \geq i$$

c) $\{N(t), t \geq 0\}$ *är en stokastisk process sådan att*

1) *För alla* $0 \leq s_1 < t_1 \leq \ldots \leq s_n < t_n$ *är* $N(t_1) - N(s_1), N(t_2) - N(s_2), \ldots, N(t_n) - N(s_n)$ *oberoende stokastiska variabler.*
2) $N(t) - N(s)$ *är* $Po(\lambda(t-s))$ *fördelad.*
3) $N(0) = 0$.

Poissonprocessen

En viktig egenskap hos Poissonprocessen är följande additionsegenskap:

Sats

Om $N_1(t)$ är en Poissonprocess med intensitet λ_1 och $N_2(t)$ är en Poissonprocess med intensitet λ_2, där $N_1(t)$ och $N_2(t)$ är oberoende. Då är $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ en Poissonprocess med intensitet $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Födelse-döds-processer

- Vi låter nu individer kunna dö också.
- En födelse-öds-process är en Markovprocess som kan hoppa ner ett steg eller upp ett steg vid varje hopp.
- En födelse-döds-process har följande intensitetesmatris **Q**:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1 \\ \mu_i & j = i-1 \\ -\lambda_i - \mu_i & j = i \\ -\lambda_0 & i = j = 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- Definera $\rho_0 = 1$ och $\rho_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$.

Föreläsningsplan

Introduktion till köteori

- Ett kö-system består av två saker.
  1. Ett antal servicestationer som tar hand om kunder.
  2. En kö som kunder kan ställa sig i när de anländer om alla servicestationer är upptagna.
- Exempel på kö-system kan vara:
  - Antal kunder i en butik
  - Akutmottagning på sjukhus
  - Anrop till en server
  - Telefonsamtal
- Intressanta frågor man vill besvara kan vara:
  - Behöver en kund köa?
  - Hur länge behöver en kund köa?
  - Hur lång tid tar det för en kund att komma igenom systemet?
  - Hur lång är kön?

Beteckningar

- Ett kösystem betecknas med A/B/c där
  - A betecknar ankomstprocessen
  - B betecknar betjäningstiden
  - c antalet betjäningsstationer
- Ankomstprocessen kan vara
  - M = Kunder anländer enligt en Poissonprocess (Markovsk)
  - GI = Kunder anländer enligt en förnyelseprocess
  - D = Kunder anländer deterministiskt
  - G = Kunder anländer enligt någon generel process.
- Betjäningstiden kan vara
  - M = Exponentialfördelade betjäningstider (Markovsk)
  - D = Deterministisk betjäningstid
  - G = Betjäningstiden är någon generell fördelning
- c är ett positivt heltal, kan vara ∞

Mer beteckningar

- $X(t)$, antalet kunder i systemet vid tidpunkten t
- $\ell(t) = \mathbb{E}[X(t)]$, förväntat antal kunder i systemet vid tidpunkten t
- $\ell = \lim_{t\to\infty} \ell(t)$, förväntat antal kunder i systemet efter lång tid
- $p_i = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X(t) = i)$, stationära fördelningen
- $X_q(t)$, antalet kunder i kön vid tidpunkten t
- $\ell_q(t) = \mathbb{E}[X_q(t)]$, förväntat antal kunder i kön vid tidpunkten t
- $\ell_q = \lim_{t\to\infty} \ell_q(t)$, förväntat antal kunder i kön efter lång tid
- U_n, n:te kundens betjäningstid
- $B(t) = \mathbb{P}(U_n \leq t)$, betjäningstidens fördelningsfunktion
- Q_n, n:te kundens kötid
- $S_n = Q_n + U_n$, n:te kundens tid i systemet
- $G_q(\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n \leq \tau)$, fördelningen för kötiden för en kund
- $G(\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq \tau)$, fördelningen för totala tiden i systemet
- $w_q = \mathbb{E}[Q]$, förväntad kötid
- $b = \mathbb{E}[U]$, förväntad betjäningstid
- $\mu = 1/b$, betjäningsintensiteten
- $w = \mathbb{E}[Q + U]$, förväntad tid i systemet

Mer beteckningar

- $X(t)$, antalet kunder i systemet vid tidpunkten t
- $\ell(t) = \mathbb{E}[X(t)]$, förväntat antal kunder i systemet vid tidpunkten t
- $\ell = \lim_{t\to\infty} \ell(t)$, förväntat antal kunder i systemet efter lång tid
- $p_i = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X(t) = i)$, stationära fördelningen
- $X_q(t)$, antalet kunder i kön vid tidpunkten t
- $\ell_q(t) = \mathbb{E}[X_q(t)]$, förväntat antal kunder i kön vid tidpunkten t
- $\ell_q = \lim_{t\to\infty} \ell_q(t)$, förväntat antal kunder i kön efter lång tid
- U_n, n:te kundens betjäningstid
- $B(t) = \mathbb{P}(U_n \leq t)$, betjäningstidens fördelningsfunktion
- Q_n, n:te kundens kötid
- $S_n = Q_n + U_n$, n:te kundens tid i systemet
- $G_q(\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Q_n \leq \tau)$, fördelningen för kötiden för en kund
- $G(\tau) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq \tau)$, fördelningen för totala tiden i systemet
- $w_q = \mathbb{E}[Q]$, förväntad kötid, Q har fördelningen G_q
- $b = \mathbb{E}[U]$, förväntad betjäningstid, U har fördelningen $B(t)$
- $\mu = 1/b$, betjäningsintensiteten
- $w = \mathbb{E}[Q + U]$, förväntad tid i systemet

M/M/2 - kö

Exempel

Vi kollar nu på en M/M/2 - kö. Med ankomstintensitet λ *och betjäningtintensitet* μ.

Ställ upp allt som var rödmarkerat på föregående slide.

Littles formel

Sats (7.1)

Under mycket allmänna villkor gäller:

$$\ell = \ell_q + c\rho$$
$$w_q = \frac{\ell_q}{\lambda}$$
$$w = \frac{\ell}{\lambda}.$$

Här är $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$*, kallas för trafikintensiteten eller betjäningsfaktorn.*

Exempel

Vi kollar på en M/M/2 - kö. Visa att Littles formel gäller i detta fall.

Lösning för M/M/c system

För ett M/M/c system gäller följande (om $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$):

- Stationära fördelningen i system uppfyller

$$p_n = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^i}{i!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\right)^{-1} & \text{om } n = 0, \\ p_0 \cdot \frac{(c\rho)^n}{n!} & \text{om } n = 1, 2, \ldots, c, \\ p_c \cdot \rho^{n-c} & \text{om } n = c+1, c+2, \ldots. \end{cases}$$

- Förväntad kö-längd är

$$\ell_q = \frac{p_c \rho}{(1-\rho)^2}$$

Jacksonnätverk

Vi ska nu kolla lite på system av köer med återkoppling. Vi illustrerar detta genom att räkna följande tentatal:

Exempel (Uppgift 4, 120528)

I ett sjukhus finns tre mottagningar; en akutmottagning, en infektionsklinik och en kirurgienhet. Utifrån kommande patienter anländer till de tre mottagningarna enligt oberoende poissonprocesser med intensiteter 5, 2 och 1 patient i timmen. Behandlingstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärden 10, 15 och 30 minuter. En patient som behandlats i akutmottagningen remitteras till infektionskliniken med sannolikhet 0.2, till kirurgenheten med sannolikhet 0.1, men lämnar sjukhuset med sannolikhet 0.7. En patient som kommer till infektionskliniken remitteras efter behandling till kirurgienheten med sannolikhet 0.1, i annat fall försvinner vederbörande från sjukhuset. En patient som anlänt till kirurgienheten försvinner efter behandling från sjukhuset. Beräkna förväntat antal patienter på sjukhuset vid "asymptotisk tid".