Klassifikation av tillstånd

Låt $(X_n; n \geq 0)$ vara en tidsdiskret Markovkedja med övergångsmatris $\boldsymbol{P}$. Vad händer efter lång tid, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n = j | X_0 = i)$?

Definition: Om $p_{ij}^{(n)} > 0$ för något $n \geq 0$ sägs i leda till j, skrivet $i \to j$. Om $i \to j$ och $j \to i$ sägs i och j kommunicera. Om alla tillstånd kommunicerar sägs kedjan vara irreducibel.

Detta definierar en ekvivalensrelation som delar upp tillståndsrummen i ekvivalensklasser, dvs klasser av tillstånd som kommunicerar. Vi kallar dessa klasser för irreducibla delklasser. Vad som händer efter lång tid beror på dessa klasser.

Absorption

Antag att tillståndsrummet är ändligt med tillstånd i sådana att $p_{ii} = 1$ (absorptionstillstånd) och att alla andra tillstånd direkt eller indirekt leder till dessa, dvs $E = A \cup G$ där $A \cap G = \varnothing$.

Med $a_{ij} = \mathsf{P}(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i) = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ så uppfyller a_{ij} ekvationssystemet

$$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in G} p_{ik} a_{kj}$$

för alla $i \in G$, $j \in A$.

Föregående exempel: A och B spelar ett tärningsspel. Om den som kastar får

resultat	**händelse**
1,2	kastaren vinner
3	omkast
4,5	motståndaren får kasta
6	kastaren förlorar

Spelets utveckling kan beskrivas av en markovkedja med tillstånd $E = \{1, 2, 3, 4\}$ med tolningarna "A kastar", "B kastar", "A vinner" resp "B vinner". Övergångsmatrisen blir då

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tillstånden $A = \{3, 4\}$ är absorptionstillstånd de övriga $G = \{1, 2\}$ är genomgångstillstånd. Notera även att med vår numrering av tillstånden kan man skriva

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{GG} & \boldsymbol{P}_{GA} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$$

där $\boldsymbol{I}$ är enhetsmatrisen och $\boldsymbol{0}$ en matris med 0:or.

Då är $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{i,j}$ en $|G| \times |A|$-matris sådan att

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_{GA} + \boldsymbol{P}_{GG}\boldsymbol{A}$$

vilket ger $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{GG})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_{GA}$ eller

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{GG})^{-1}\boldsymbol{P}_{GA}.$$

Låt T_i = tiden till absorption givet start i i, $i \in G$, och betrakta $t_i = \mathsf{E}[T_i]$. ($T_i = 0$ för $i \in A$.)

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + p_{1,1}t_1 + p_{1,2}t_2 = 1 + \tfrac{1}{6}t_1 + \tfrac{2}{6}t_2 \\ t_2 &= 1 + p_{2,1}t_1 + p_{2,2}t_2 = 1 + \tfrac{2}{6}t_1 + \tfrac{1}{6}t_2 \end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\boldsymbol{t} = [t_i] = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

I allmänhet för $i \in G$ så är

$$t_i = 1 + \sum_{k \in G} p_{ik} t_k$$

för alla $i \in G$. Med $\boldsymbol{t}$ som kolumnvektor fås matrisformuleringen

$$\boldsymbol{t} = \mathbf{1} + \boldsymbol{P}_{GG}\boldsymbol{t}$$

eller

$$\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{GG})^{-1}\mathbf{1}$$

där $\mathbf{1}$ är kolumnvektorn med ettor.

För en händelse A definieras det betingade väntevärdet

$$\mathsf{E}[T|A] = \sum_k k\mathsf{P}(T = k|A).$$

Sats (Lagen om total förväntan). Om $A_1, \ldots, A_n$ är händelser som partitionerar ett utfallsrum så är

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[T] &= \sum_k k\mathsf{P}(T = k) = \sum_k k \sum_j \mathsf{P}(T = k|A_j)\,\mathsf{P}(A_j) = \sum_j \mathsf{P}(A_j) \sum_k k\mathsf{P}(T = k|A_j) \\ &= \sum_j \mathsf{E}[T|A_j]\,\mathsf{P}(A_j). \end{aligned}$$

Vi kan tillämpa detta med en initialfördelning $\boldsymbol{p}^{(0)}$. Det obetingade väntevärdet är då

$$\mathsf{E}[\text{Tid till absorption}] = \sum_j \boldsymbol{t}_j \boldsymbol{p}_j^{(0)} = \boldsymbol{p}^{(0)}\boldsymbol{t}.$$

Tidsinvarianta fördelningar

Definition: En sannolikhetsfördelning $\boldsymbol{\pi}$ kallas för *stationärfördelning* till en Markovkedja med övergångsmatris $\boldsymbol{P}$ om

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}.$$

Om man en Markovkedja har initialfördelning $\boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{\pi}$ så är

$$\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{p}^{(0)}\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{n-1} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^{n-1} = \cdots = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$$

för alla $n \geq 0$. Om $\boldsymbol{p}^{(n)}$ konvergerar måste gränsvärdet vara en stationärfördelning.

Definition: Om

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}^{(n)}$$

existerar och inte beror av $\boldsymbol{p}^{(0)}$ sägs Markovkedjan vara *ergodisk*.

Sats. En Markovkedja med ändligt tillståndsrum har minst en stationär fördelning.

Sats. En irreducibel Markovkedja har högst en stationär fördelning.

Speciellt: Ändlig + irreducibel medför en unik stationärfördelning. Följande sats ger tillräckliga villkor för att den även är en gränsfördelning.

Sats. En aperiodisk irreducibel Markovkedja med ändligt tillståndsrum är ergodisk.

Definition: För tillstånd i låt

$$D_i = \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Låt d_i vara den största gemensamma delaren till talen i D_i. Talet d_i kallas *periodtiden* och om $d_i > 1$ kallas tillståndet i *periodiskt*, annars *aperiodiskt*. Kommunicerande tillstånd har samma periodtid.

Sats (Ergodicitetens huvudssats). För en ergodisk markovkedja $(X_n; n \geq 0)$ och en funktion $f : E \to \mathbb{R}$ är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) = \mathsf{E}\left[f(X)\right]$$

där X har fördelning $\boldsymbol{\pi}$, stationärfördelningen för Markovkedjan.

Sats. För en ergodisk kedja med stationärfördelning $\boldsymbol{\pi}$. Då är

$$\mathsf{E}\left[\text{tid mellan två besök i } i\right] = \frac{1}{\pi_i}$$

$$\mathsf{E}\left[\text{Antal besök i tid i tillstånd } j \text{ mellan två besök i } i\right] = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

Bevis: Antag att i är ett tillstånd i den slutna irreducibla delklassen av tillstånd och låt kedjan börja i tillstånd i, dvs. $\mathsf{P}\left(X_0 = i\right) = 1$.

Då är sekvensen $T_1, T_2, \ldots$ av återkomsttider till i en sekvens av oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Stora talens lag ger att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} T_i = \mathsf{E}\left[T_i\right].$$

Låt funktionen $f(x) = 1$ om $x = i$ och 0 annars. Tag X med fördelning $\boldsymbol{\pi}$. Då är

$$\mathsf{E}\left[f(X)\right] = 1 \cdot \mathsf{P}\left(X = i\right) + 0 \cdot \mathsf{P}\left(X \neq i\right) = \pi_i$$

och enligt ergocitetssatsen

$$\pi_i \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{T_1 + \cdots + T_k} = \frac{1}{\mathsf{E}\left[T_i\right]}.$$

På samma sätt visas det andra påståendet.