Om

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}(n)$$

existerar och inte beror av $\boldsymbol{p}(0)$ sägs Markovkedjan vara *ergodisk*.

Exempel: Väderleksexempel. Med tillstånd

$$E = \{\text{uppehåll}, \text{regn}, \text{snö}\} = \{1, 2, 3\}$$

och övergångsmatris

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.70 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.50 \end{pmatrix}$$

fås en ändlig, irreducibel och aperiodisk markovkedja. Den unika stationärfördelningen $\boldsymbol{\pi} = (0.40,\ 0.40,\ 0.20)$ är en gränsfördelning.

Sats. För en ergodisk markovkedja med stationärfördelning $\boldsymbol{\pi}$ så är

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) = \mathsf{E}\left[f(X)\right]$$

där X har fördelningen $\boldsymbol{\pi}$.

Sats. För en ergodisk kedja med stationärfördelning $\boldsymbol{\pi}$. Då är

$$\mathsf{E}\left[\text{tid mellan två besök i } i\right] = \frac{1}{\pi_i}$$

$$\mathsf{E}\left[\text{Antal besök i tid i tillstånd } j \text{ mellan två besök i } i\right] = \frac{\pi_j}{\pi_i}.$$

(Bevisskiss.)

Exempel: Väderleksexempel.

$$\mathsf{E}\left[\text{Nederbördsdagar mellan två uppehåll}\right] = \frac{1}{\pi_1} - 1 = \frac{1}{0.40} - 1 = 1.5$$

$$\mathsf{E}\left[\text{Snödagar mellan två uppehåll}\right] = \frac{\pi_3}{\pi_1} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$$

Tidsdiskreta Markovkedjor med oändligt antal tillstånd

Viktig konsekvens: existensen av någon stationärfördelning inte given.

Låt T_i vara tiden att gå från i tillbaka till i. Tre fall:

$$\begin{array}{cl} \mathsf{P}\left(T_i < \infty\right) < 1 & i \text{ transient} \\ \mathsf{P}\left(T_i < \infty\right) = 1, \mathsf{E}\left[T_i\right] = \infty & i \text{ noll-rekurrent} \\ \mathsf{E}\left[T_i\right] < \infty & i \text{ positivt rekurrent} \end{array}$$

Satserna innan generaliseras om ”ändlig” irreducibel Markovkedja ersätts med ”positivt rekurrent” irreducibel Markovkedja.

Markovkedjor i kontinuerlig tid

Nu bildas matriser av övergångssannolikheter

$$\boldsymbol{P}(t) = [X(t) = j|X(0) = i]_{i,j}$$

som uppfyller Chapman-Kolmogorovs ekvationer:

1. $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$.
2. $\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s) \cdot \boldsymbol{P}(t)$.
3. $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)$

för alla $s, t \geq 0$.

Vi definierar *intensiteterna*

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathsf{P}\left(X(h) = j | X(0) = i\right), \quad j \neq i \\ q_i &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathsf{P}\left(X(h) \neq i | X(0) = i\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [1 - \mathsf{P}\left(X(h) = i | X(0) = i\right)] \end{aligned}$$

Vi förutsätter att derivatorna existerar och är ändliga. Vidare förutsätter vi att

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$

Alltså är

$$\mathsf{P}\left(X(t+h) = j | X(t) = i\right) \approx q_{ij} h \qquad \mathsf{P}\left(X(t+h) = i | X(t) = i\right) \approx 1 - q_i h.$$

Dynamik: Markovkedjan tillbringar en exponentialfördelad tid i tillstånd i med väntevärde $1/q_i$. Därefter hoppar kedjan till tillstånd $j \neq i$ med sannolikhet $\tilde{p}_{ij} = q_{ij}/q_i$.

Definition: Initensitetsmatrisen för en tidskontinuerlig Markovkedja definieras som $\boldsymbol{Q} = [q_{ij}]_{ij}$ där $q_{ii} = -q_i$.

Exempel: Intensitetsmatrisen

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

motsvaras av att tiderna i tillstånden är exponentialfördelade med väntevärden 1/5, 1 resp. 1/4 och har hoppmatris

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notera att

$$\boldsymbol{Q} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I})$$

där alla radsummor i matrisen $\boldsymbol{Q}$ är 0. (Alternativt: för små h är $\boldsymbol{P}(h) \approx \boldsymbol{I} + h\boldsymbol{Q}$.)

Matrisen $\boldsymbol{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{ij}$ bestäms som lösning till följande differentialekvationer:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(t+h)-\boldsymbol{P}(t)] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(h)-\boldsymbol{P}(t)] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(h)\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}(t)] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\boldsymbol{P}(t)[\boldsymbol{P}(h)-\boldsymbol{I}] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(h)-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{P}(t) \\
&= \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t).
\end{aligned}
$$

Detta kallas för Kolmogorovs framåt- respektive bakåtekvationer.

Anmärkning: bakåtekvationerna har alltid (minst en) lösning, framåtekvationerna kan sakna lösning.

Med hjälp av framåtekvationerna får vi att de absoluta sannolikheterna uppfyller:

$$
\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q}.
$$

Sats. En sannoliketsfördelning $\boldsymbol{\pi}$ uppfyller

$$
\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} \qquad \left(\text{alt. } \pi_j q_j = \sum_{i\neq j}\pi_i q_{ij},\ \text{alla } j\right)
$$

om och endast om den är en stationärfördelning för Markovkedjan med intensitetsmatris $\boldsymbol{Q}$.

Bevis: Om $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)$ så är med framåtekvationen $\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q}$.

Omvänt: Om $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$ så med $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{\pi}$ är $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)$ och $\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t) = \mathbf{0}$ det vill säga $\boldsymbol{p}(t)$ är konstant.

Exempel: Intensitetsmatrisen

$$
\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}
$$

ger balansekvationerna

$$
5\pi_1 = 0\pi_2 + 2\pi_3 \qquad 1\pi_2 = 4\pi_1 + 2\pi_3 \qquad 4\pi_3 = 1\pi_1 + 1\pi_2
$$

som entydigt bestämmer $\boldsymbol{\pi}$ upp till en multiplikativ konstant. Kravet att $\boldsymbol{\pi}$ är en sannolikhetsfördelning ger lösningen

$$
\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} & \frac{18}{25} & \frac{5}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .08 & .72 & .20 \end{bmatrix}.
$$

Sats. Om Markovkedjan är ändlig existerar minst en stationärfördelning.

Sats. Om Markovkedjan är irreducibel existerar högst en stationärfördelning.

Sats. Om Markovkedjan är ändlig och irreducibel är den tidskontinuerliga Markovkedjan ergodisk.