Övergångssannolikheter i kontinuerlig tid, för små h är $\boldsymbol{P}(h) \approx \boldsymbol{I} + h\boldsymbol{Q}$.

Formellt, matrisen $\boldsymbol{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{ij}$ bestäms som lösning till följande differentialekvationer:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(t+h) - \boldsymbol{P}(t)] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{P}(t)] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(h)\boldsymbol{P}(t) - \boldsymbol{P}(t)] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\boldsymbol{P}(t)[\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I}] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{I}]\boldsymbol{P}(t) \\
&= \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t).
\end{aligned}$$

Detta kallas för Kolmogorovs framåt- respektive bakåtekvationer.

Anmärkning: bakåtekvationerna har alltid (minst en) lösning, framåtekvationerna kan sakna lösning.

Med hjälp av framåtekvationerna får vi att de absoluta sannolikheterna uppfyller:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{p}(t)\boldsymbol{Q}.$$

Sats. En sannoliketsfördelning $\boldsymbol{\pi}$ uppfyller

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} \qquad \left(\text{alt. } \pi_j q_j = \sum_{i\neq j} \pi_i q_{ij}, \text{ alla } j\right)$$

om och endast om den är en stationärfördelning för Markovkedjan med intensitetsmatris $\boldsymbol{Q}$.

Bevis: Om $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)$ så är med framåtekvationen $\boldsymbol{0} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q}$.

Omvänt: Om $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$ så med $\boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{\pi}$ är $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}(0)\boldsymbol{P}(t)$ och $\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{0}$ det vill säga $\boldsymbol{p}(t)$ är konstant.

Exempel: Intensitetsmatrisen

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ger balansekvationerna

$$5\pi_1 = 0\pi_2 + 2\pi_3 \qquad 1\pi_2 = 4\pi_1 + 2\pi_3 \qquad 4\pi_3 = 1\pi_1 + 1\pi_2$$

som entydigt bestämmer $\boldsymbol{\pi}$ upp till en multiplikativ konstant. Kravet att $\boldsymbol{\pi}$ är en sannolikhetsfördelning ger lösningen

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{2}{25} & \frac{18}{25} & \frac{5}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .08 & .72 & .20 \end{bmatrix}.$$

Sats. Om Markovkedjan är ändlig existerar minst en stationärfördelning.

Sats. Om Markovkedjan är irreducibel existerar högst en stationärfördelning.

Sats. Om Markovkedjan är ändlig och irreducibel är den tidskontinuerliga Markovkedjan ergodisk.

Precis som i diskret tid kan π_i tolkas som andelen tid kedjan tillbringar i tillstånd i.

$$\pi_i = \frac{1/q_i}{\mathsf{E}[T_i]}$$

där T_i är tiden mellan två inträden till tillstånd i. Alltså är

$$\mathsf{E}\left[T_i\right] = \frac{1}{q_i \pi_i}.$$

Vidare är tiden som kedjan tillbringar i tillstånd j mellan två inträden i tillstånd i:

$$\mathsf{E}\left[T_i\right] \pi_j = \frac{\pi_j}{q_i \pi_i}.$$

Absorbtion i kontinuerlig tid: Det ändliga tillståndsrummet $E = A \cup G$ där $A \cap G = \varnothing$, där A är mängden av absorberande tillstånd, $q_i = 0$, och G genomgångstillstånden.

Sannolikheterna $a_{ij} = \mathsf{P}\left(\text{Kedjan absorberas i } j \text{ givet start i } i\right)$ uppfyller

$$a_{ij} = \sum_k \tilde{p}_{ik} a_{kj} = \tilde{p}_{ij} + \sum_{k \in G} \tilde{p}_{ik} a_{kj} = \frac{q_{ij}}{q_i} + \sum_{k \in G \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} a_{kj}.$$

för alla $i \in G$, $j \in A$. För de förväntade tiderna till absorbtion fås

$$t_i = \frac{1}{q_i} + \sum_k \tilde{p}_{ik} t_k = \frac{1}{q_i} + \sum_{k \in G} \tilde{p}_{ik} t_k = \frac{1}{q_i} + \sum_{k \in G \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} t_k$$

för $i \in G$.

Födelse-/döds-processer

Låt tillståndsrummet för den tidskontinuerliga Markovkedjan $(X(t))_{t \geq 0}$ vara $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ och dess intensitetsmatris $\boldsymbol{Q}$. Processen $(X(t))_{t \geq 0}$ sägs vara en födelseprocess om de enda positiva intensiteterna är på formen $q_{i,i+1}$, $i \geq 0$, och en födelse-/dödsprocess om endast $q_{i,i+1} = \lambda_i$ och $q_{i+1,i} = \mu_{i+1}$, $i \geq 0$, är positiva.

Exempel: Poissonprocessen, en födelseprocess med konstant födelseintensitet, $\lambda_i = q_{i,i+1} = \lambda > 0$.

Poissonprocessen har karaktäriseras av att den har oberoende Poissonfördelade tillskott, det vill säga för alla $0 < s < t$ är $X(t) - X(s)$ och $X(s) - X(0)$ är oberoende och Poissonfördelade med väntevärde $\lambda(t - s)$ resp. λs.

Regularitet

För en generell födelseprocess med $X(0) = 0$ låt T_i, $i > 0$, vara tiden till tillstånd i besöks. Då är

$$\mathsf{E}\left[T_n\right] = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{n-1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}.$$

Två saker kan inträffa

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{E}\left[T_n\right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i} \begin{cases} < \infty & \text{processen exploderar, är irreguljär} \\ = \infty & \text{processen exploderar inte, är reguljär} \end{cases}$$

Vi kommer bara att betrakta reguljära Markovkedjor. För nödvändiga och tillräckliga villkor för regularitet se kursboken.

Exempel: Födelseprocessen med $\lambda_i = i\lambda$, $i \geq 1$, är reguljär eftersom

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{E}\left[T_n\right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\lambda} = \infty.$$

Exempel: Födelseprocessen med $\lambda_i = i^2\lambda$, $i \geq 1$, är irreguljär eftersom

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[T_n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2\lambda} < \infty.$$

Stationärfördelning för födelse-/dödsprocesser

Stationärfördelningen $\boldsymbol{\pi}$ måste uppfylla de lokala balansekvationerna:

$$\pi_{k-1}\lambda_{k-1} = \mu_k \pi_k.$$

Detta ger:

$$\pi_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\pi_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}}{\mu_k\mu_{k-1}}\pi_{k-2} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdots\mu_1}\pi_0.$$

Med $\rho_0 = 1$ och $\rho_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k-1}/\mu_k$ så uppfyller $\pi_k = \rho_k\pi_0$ ekvationen $\boldsymbol{\pi Q} = \mathbf{0}$. Kan man sedan normalisera så att

$$1 = \sum_k \pi_k = \sum_k \rho_k\pi_0 = \pi_0 \sum_k \rho_k,$$

dvs välja $\pi_0 = 1/\sum_k \rho_k$, får vi en sannolikhetsfördelning som lösning och alltså den unika gränsfördelningen för den ergodiska födelse-/döds-processen. (Normaliseringen förutrsätter att $\sum_k \rho_k < \infty$).