För ett stationärt M/M/c-system låt X_q beskriva antalet personer i kö och S_q tiden en ankommande person tillbringar i kö.

Vi minns att $\mathsf{E}[X_q] = \mathsf{P}(\text{vänta})\,\frac{\rho}{1-\rho}$ och $\mathsf{P}(S_q > t) = \mathsf{P}(\text{vänta})\,\mathrm{e}^{-c\mu(1-\rho)t}$ där $\rho = \lambda/(c\mu)$.

Inför en stokastisk variabel I sådan att $\mathsf{P}(I=1) = 1 - \mathsf{P}(I=0) = \mathsf{P}(\text{vänta})$ och S' exponentialfördelad med väntevärde $1/c\mu(1-\rho)$ oberoende av I. Då är $S_q = I \cdot S'$. Speciellt får vi att

$$\mathsf{E}[S_q] = \mathsf{E}[I \cdot S'] = \mathsf{E}[I]\,\mathsf{E}[S'] = \mathsf{P}(\text{vänta}) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)}.$$

Vidare, med S som tiden en ankommande kund tillbringar i ett stationärt system har väntevärde

$$\mathsf{E}[S] = \mathsf{E}[S_q] + \mathsf{E}[\text{betjäningstid}] = \mathsf{P}(\text{vänta}) \cdot \frac{1}{c\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}.$$

Slutligen,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \cdots = \sum_{k=0}^{c} k\pi_k + \sum_{k=1}^{\infty}(c+k)\pi_{c+k} = \sum_{k=1}^{c} k\frac{(c\rho)^k}{k!}\pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c+k)\rho^k\pi_c \\
&= c\rho\sum_{k=0}^{c-1}\frac{(c\rho)^k}{k!}\pi_0 + c\rho\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\pi_c + \sum_{k=0}^{\infty}k\pi_{k+c} = c\rho\mathsf{P}(X \le c-1) + c\rho\mathsf{P}(X \ge c) + \mathsf{E}[X_q] \\
&= c\rho + \mathsf{E}[X_q].
\end{aligned}$$

Little's formler

$$\underbrace{\mathsf{E}[X_q]}_{=l_q} = \lambda\,\underbrace{\mathsf{E}[S_q]}_{=w_q} \qquad \underbrace{\mathsf{E}[X]}_{=l} = \lambda\,\underbrace{\mathsf{E}[S]}_{=w} \qquad \mathsf{E}[S] = \mathsf{E}[S_q] + \mathsf{E}[\text{betjäningstid}]$$

Tidsreversibilitet

Låt $(X_t)_{t\ge 0}$ vara en stationär Markovkedja. För $i \ne j$ är

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X(t) = j | X(t+h) = i) &= \frac{\mathsf{P}(X(t) = j, X(t+h) = i)}{\mathsf{P}(X(t+h) = i)} \\
&= \frac{\mathsf{P}(X(t+h) = i | X(t) = j)\,\mathsf{P}(X(t) = j)}{\mathsf{P}(X(t+h) = i)} \\
&= \mathsf{P}(X(t+h) = i | X(t) = j)\,\frac{\pi_j}{\pi_i}
\end{aligned}$$

Detta ger att Markovkedjan i baklängestid har övergångsintensiteter

$$q'_{ij} = q_{ji}\pi_j/\pi_i,$$

En stationär födelse-/döds-process uppfyller

$$\pi_i q_{ij} = q_{ji}\pi_j \qquad (\text{dvs } \pi_i\lambda_i = \pi_{i+1}\mu_{i+1})$$

vilket innebär att $q_{ij} = q'_{ij}$, dvs framåtkedjan och bakåtkedjan har samma fördelning. Födelse-/döds-processer är tidsreversibla.

Ett stationärt $M/M/c$-system är tidsreversibelt. I det reverserade systemet är ankomstprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och ankomster efter t är oberoende av $(X(s))_{s\le t}$. Det betyder att i det ursprungliga systemet är avgångsprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och avgångar före t är oberoende av $(X(s))_{s\ge t}$.

$M/M/1$ i tandem

Betrakta d stycken kösystem på rad. En kund som expedierats vid station 1 går vidare till station 2 därefter till station 3 och så vidare. Varje station har en betjänare och betjäningstiderna vid station $1, 2, \ldots, d$ är oberoende och exponentialfördelade med intensiteter $\mu_1, \ldots, \mu_d$. Ankomster utifrån sker enbart till station 1 enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda < \mu_j$, för alla j.

Med $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ är station 1 ett $M/M/1$-system och stationärfördelningen för k kunder är $(1-\rho_1)\rho_1^k$. Om station 1 är stationär är utprocessen en Poissonprocess med intensitet λ och då är även station två ett $M/M/1$-system med stationär fördelning för k kunder $(1-\rho_2)\rho_2^k$, där $\rho_2 = \lambda/\mu_2$. Upprepas resonemanget fås att station j har en stationärfördelning

$$\mathsf{P}\left(X_j = k\right) = (1-\rho_j)\rho_j^k,\ k \geq 0,\ \rho_j = \lambda/\mu_j$$

Vidare är den simultana fördelningen för det stationära antalet kunder

$$\mathsf{P}\left(X_1 = k_1, \ldots, X_d = k_d\right) = (1-\rho_1)\rho_1^{k_1} \cdots (1-\rho_d)\rho_d^{k_d}.$$

Motsvarande kan göras för $M/M/c$-system. Antalet kunder vid stationerna i det stationära tandemsystemet av $M/M/c$-köer är simultant oberoende stokastiska variabler där marginalfördelningarna är desamma som för $M/M/c$-systemet.

$M/M/1$ med återkoppling

Ankomster sker enligt en Poissonprocess med intensitet λ. Betjäningstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde $1/\mu$. Varje slutförd betjäning resulterar i en korrekt enhet med sannolikhet p oberoende av tidigare betjäningar. Icke-korrekta enheter servas på nytt.

Systemet har samma dynamik som ett $M/M/1$-system med ankomstintensitet λ och nettobetjäningsintensitet $p\mu$, dvs det existerar en stationärfördelning för antalet kunder som ges av

$$\pi_k = (1-\rho)\rho^k, \quad k \geq 0$$

då $\rho = \lambda/p\mu < 1$.

Låt Λ vara den totala ankomstintensiteten varmed enheter kommer till betjänaren, inklusive returer av icke-korrekta enheter. Då är $\Lambda(1-p) + \lambda = \Lambda$, dvs $\Lambda = \lambda/p$. Vi kan se systemet som ett system med ankomster enligt en (punkt-)process med intensitet Λ och betjäningsintensitet μ. Ankomstprocessen är ej en Poissonprocess.

Jacksonnätverk

System av återkopplade $M/M/c$-system.

- Ankomster till station i, $i = 1, \ldots, d$ enligt en Poissonprocess med intensitet λ_i.
- Betjäningstiderna vid nod i är oberoende exponentialfördelade med väntevärden $1/\mu_i$.
- Markovska rutter i nätverket: en kund lämnar nod i och går till nod j med sannolikhet p_{ij}, oberoende av tidigare väg, och lämnar nätverket med sannolikhet $p_i = \sum_{j=1}^d p_{ij}$.

Alla storheter förutsätts vara oberoende.

Låt Λ_j vara den totala intensiteten ut ur nod j. Trafikbalans ger att Λ_j måste uppfylla

$$\Lambda_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^d \Lambda_i p_{ij}.$$

Om $\rho_j = \Lambda_j/\mu_j < 1$, $j = 1, \ldots, d$, så är $(X_1(t), \ldots, X_d(t))_{t\geq 0}$ en ergodisk Markovkedja med stationärfördelning

$$\mathsf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_d = x_d) = \mathsf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathsf{P}(X_d = x_d) = \pi_1(x_1) \cdots \pi_d(x_d)$$

där $\pi_i(k)$ är fördelningen för det i ett stationärt $M/M/c$-system finns k enheter.