Forelæsning 4

Markovprocesser i kontinuerlig tid

1

Repetition

$$P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots) =$$
$$= P(X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n)$$

Tidshomogen process

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) =$$
$$= P(X(t) = j \mid X(0) = i)$$

$$P = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$$

Vi har här en intensitetsmatris

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ & & & \\ q_{n1} & & & q_{nn} \end{pmatrix}$$

där $q_i = -q_{ii}$ = uthoppsintensiteten från tillstånd i

tiden till uthopp från tillstånd $i = T \in \exp(q_i)$

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$$, d.v.s varje radsumma $= 0$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{12} & & \tilde{p}_{1n} \\ \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} & & \tilde{p}_{2n} \\ \tilde{p}_{n1} & & & \tilde{p}_{nn} \end{pmatrix} =$$

övergångsmatrisen till den inbäddade hoppkedjan

uthopps ~~sannolikhets~~ matrisen

där

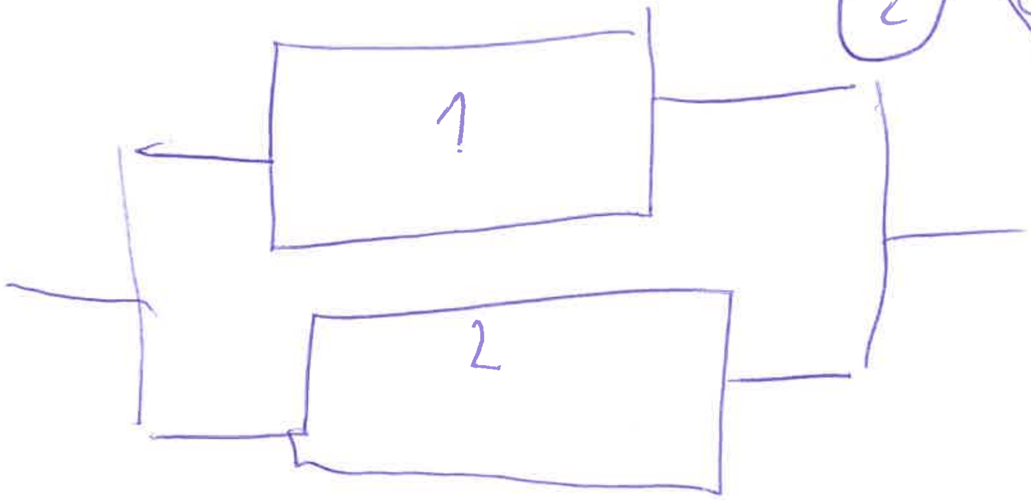
$$\tilde{p}_{ii} = 0$$
$$\tilde{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$

Om ett tillstånd i är absorberande blir $\tilde{p}_{ii} = 1$ och $\tilde{p}_{ij} = 0$ $i \neq j$

Om T är tiden till uthopp från tillstånd i
gäller att $T \in \exp(q_i)$

ex 6.3

②



Anta komponenterna har livslängder som är
ober och $\exp(\lambda_1)$ resp $\exp(\lambda_2)$ och att de repareras
om de går sönder med reparationstider ober av
varandra och med väntevärde $\frac{1}{\mu}$ ← reparationsintensitet

$$E = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

s_1 = båda komponenterna hela
s_2 = 1 hel, 2 fel
s_3 = 2 hel 1, fel
s_4 = båda fel $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda_1) & 0 & \lambda_1 \\ \mu & 0 & -(\mu+\lambda_2) & \lambda_2 \\ 0 & +\mu & \mu & -2\mu \end{pmatrix}$$

3

Om T är tiden ~~till uthopp~~ från tillstånd i gäller att $T \in \cancel{exp}(q_i)$

Absorption

Vid absorption i tillstånd $i \Rightarrow q_{ij} = 0 \;\forall j$

d.v.s hela raden är nollor

Anta A-kedja

jfr diskreta fallet

Diskret $$a_{ij} = p_{ij} + \sum_{h \in G} p_{ih} a_{hj} \quad i \in G$$

Kont $$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} + \sum_{h \in G \setminus \{i\}} \frac{q_{ih}}{q_h} a_{hj} \quad i \in G$$

Diskret $$t_i = 1 + \sum_{h \in G} p_{ih} t_h \quad i \in G$$

Kont $$t_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{h \in G \setminus \{i\}} \frac{q_{ih}}{q_k} t_k \quad i \in G$$

$$q_{ij} = \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ij}(h) - \overset{0}{p_{ij}(0)}}{h} = p'_{ij}(0) \qquad i \neq j$$

$$q_{ii} = \lim_{h\to 0+} \frac{p_{ii}(h) - \overset{1}{p_{ii}(0)}}{h} = \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \lim_{h\to 0+} \frac{P(h) - I}{h}$$

Titta nu på Chapman–Kolmogorovs sats

$$P(t+h) = P(t) \cdot P(h) = P(h)\,P(t)$$

$$\Rightarrow \quad P(t+h) - P(t) = P(t)\left[P(h) - I\right]$$

~~resp $P(t+h) = [P(h) - I]\,P(t)$~~

resp $P(t+h) - P(t) = \left[P(h) - I\right] P(t)$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P(t)\left[\frac{P(h) - I}{h}\right] = P(t) \cdot Q$$

resp $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(h) - I}{h}\,P(t) = Q\,P(t)$

d.v.s. $P'(t) = P(t)\,Q$ ~~Chapman~~ Kolmogorovs framåtekv.

resp $P'(t) = Q\,P(t)$ Kolmogorovs bakåtekv.

(5) (6)

Framåt-ekv

$$\Rightarrow \quad p_{11}'(t) = p_{11}(t) q_{11} + p_{12}(t) q_{21} + \dots - p_{1n}(t) q_{n1}$$

$$p_{21}'(t) = p_{21}(t) q_{11} + p_{22}(t) q_{21} + \dots - p_{2n} q_{n1}$$

Vi får ett system av kopplade diff-ekv

Anta nu stationär fördelning $\Leftrightarrow \underline{\pi} = \pi P(t)$

$(\underline{\pi} = (\pi_1(t), \pi_2(t), \dots)$

derivering $\Rightarrow \underline{0} = \underline{\pi} P'(t) =$ framåtekv $= \pi P(t) Q = \pi Q$

d.v.s stationär fördelning i kont tid

$$\Longrightarrow$$

$$\underline{\pi} Q = \underline{0}$$

En ändlig Markovprocess har minst en stationär fördelning

I kontinuerlig tid ~~finns inget~~ har vi ingen period

alltså finns inte begreppet aperiodisk här (*) Och har $\tilde{P}$ ... aperiodisk (*)

$\Rightarrow$ En ändlig irreducibel process är ergodisk

d.v.s har en entydig gränsfördelning

oavsett start fördelning som är den stationära fördelningen

jfr ~~diskreta~~ diskreta fallet $\quad \pi_i = \dfrac{1}{E(T_i)}$ och $\dfrac{\pi_j}{\pi_i}$

tiden mellan två besök i tillstånd i

med kont fallet $\quad \pi_i = \dfrac{1}{q_i E(T_i)} \quad \dfrac{1}{q_i} \dfrac{\pi_j}{\pi_i}$

(6)

ex)

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\pi}\, Q = 0 \Rightarrow \begin{aligned} -5\pi_1 + 0\pi_2 + 2\pi_3 &= 0 \\ 4\pi_1 - \pi_2 + 2\pi_3 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 - 4\pi_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) = k \cdot (2, 18, 5)$$

dar $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \underline{\pi} = \left(\frac{2}{25}, \frac{18}{25}, \frac{5}{25}\right)$

Poissonprocessen

7

Def $\{N(t); t \geq 0\}$ är en Poissonprocess med intensitet λ

om $N(t)$ är en Markovprocess med $N(0) = 0$

och $q_{ij} = \lambda \; ; \; j = i+1$ $\qquad E = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$q_{ij} = -\lambda \; ; \; i = j$

0 annars

d.v.s $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & & 0 & \\ & & -\lambda & \lambda & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \end{pmatrix}$

$$P'(t) = P(t) \cdot Q$$

$$\Rightarrow \quad P_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & j \geq i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Följande gäller: 1) Antal händelser i disjunkta tidsintervall är ober

d.v.s. för $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_3 \ldots$

gäller att $N(t_1) - N(0),\; N(t_2) - N(t_1) \ldots$ är ober sinsemellan

2) Antal händelser i $[t, t+s] \in Po(\lambda s)$

eller $N(t+s) - N(t) \in Po(\lambda s)$