Förelåsning 5

Födelseprocess

(8)

Def En Markovprocess $\{X(t);\ t\geq 0\}$ med $E=\{0,1,2\dots\}$

är en födelseprocess med födelseintensiteter λ_i $i=0,1,\dots$

om $$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i \ ; & j=i+1 \\ -\lambda_i \ ; & j=i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Förväntad tid i tillstånd i $= \dfrac{1}{\lambda_i} = E(T_i)$ (fel på sid 62)

Förväntad tid att nå tillstånd n vid start i tillstånd 0

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

Om då $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ når kedjan alltså oändligheten

~~under~~ på ändlig tid, d.v.s kedjan exploderar

D.v.s. vi har en irregulär process

om $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$ är kedjan reguljär däremot

9

ex 1

$$\lambda_i = i \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot \lambda_i} = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right]$$

divergent $\Rightarrow$ reguljär

ex 2

$$\lambda_i = i^2 \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) =$$

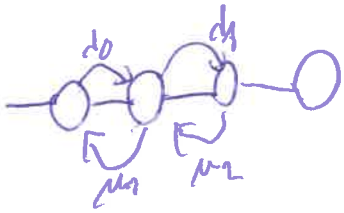
$$\cancel{< \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots\right.}$$

~~kvottestet~~ $\cancel{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1}$

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \qquad \alpha > 1 \Rightarrow \text{konv}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \lambda} < \infty \Rightarrow \text{ej reguljär}$$

Födelse-dödsprocess



Def En Markovprocess $\{X(t); t \geq 0\}$ med födelseintensiteter $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ och dödsintensiteter $\mu_1, \mu_2, \dots$

d.v.s
$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i; & j = i+1 \\ \mu_i; & j = i-1 \\ -(\lambda_i + \mu_i); & j = i \\ -\lambda_0; & i = j = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$E = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \\ & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & \\ & & \mu_3 & (-\mu_3+\lambda_3) & \lambda_3 & 0 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

11

$\Pi Q = 0 \qquad -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 = 0 \qquad (1)$

$$\lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2 \pi_2 = 0 \quad (2)$$

$$\lambda_1 \pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 + \mu_3 \pi_3 = 0 \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i \pi_i - (\lambda_{i+1} + \mu_{i+1})\pi_{i+1} + \mu_{i+2}\pi_{i+2} = 0 \quad (4)$$

$$(1) \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

în (2) $\Rightarrow \lambda_0 \pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 + \mu_2 \pi_2 = 0$

$$\pi_2 = \frac{\pi_0}{\mu_2}\left[\frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_1}\lambda_0 - \lambda_0\right] = \frac{\pi_0}{\mu_2}\left[\frac{(\lambda_1 + \mu_1)\lambda_0}{\mu_1} - \frac{\lambda_0 \mu_1}{\mu_1}\right] =$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}\pi_0$$

$$\vdots$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}\pi_0 = \rho_n \pi_0$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \cdots \pi_\infty = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0 + \rho_1 \pi_0 + \rho_2 \pi_0 + \cdots = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i} \Rightarrow \pi_n = \frac{\rho_n}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i}$$ dacă $\rho_0 = 1$

(12)

Den stationära fördelningen existerar om $\sum \rho_i < \infty$

Villkor för reguljär process innebär att den inte exploderar jfr födelseprocess

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \underset{t_1}{\frac{1}{\lambda_0}} + \underset{t_2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \cdots\cdots = \infty$$

Här fås villkoret ur formeln för absorption i tillstånd n

$$t_{0n} = \frac{1}{\lambda_0} + t_{1n}$$

$$t_{in} = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} t_{i+1,n} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} t_{i-1,n}$$

$\vdots$

$$t_{nn} = 0$$

Efter en hel del räkningar fås då

att $t_{in} = \sum_{h=i}^{n-1} \frac{1}{\lambda_h \rho_h} \cdot \sum_{j=0}^{k} \rho_j$

Villkor blir då att $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h \rho_h} \cdot \sum_{j=0}^{k} \rho_j = \infty$

Om processen då skall vara stationär och reguljär krävs att $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h \rho_h} = \infty$ och $\sum_{j=0}^{h} \rho_j < \infty$

En oändlig process måste vara reguljär för att den ska kunna vara stationär

Det finns alltså processer som är reguljära och stationära
Det finns processer som varken är reguljära eller stationära
Det finns processer som är reguljära men ej stationära

Men det finns inte processer som är stationära och icke-reguljära.

	reguljär	stationär
icke-reguljär		
icke-stationär		

M/M/2

Q-matriser

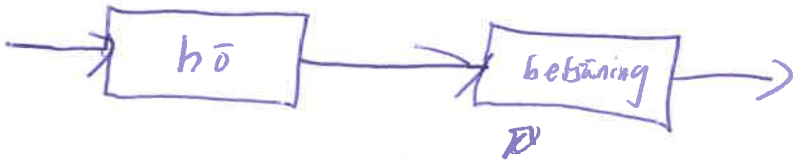
jfr M/M/1 och M/M/2

$\underline{\pi}$ l_q

M/G/1

Kö-teori

Ankomst process
med intensitet λ



betjäningsintensitet$_{\text{för server}}$ $= \mu$

$U_n =$ n:e kundens betjäningstid $E(U_n) = b = \frac{1}{\mu}$

Beteckningar

$U_n =$ n:te kundens betjäningstid

$Q_n =$ n:te kundens kötid

$S_n = Q_n + U_n =$ n:te kundens tid i systemet

$X(t) =$ antal kunder i systemet vid tiden t

$\ell(t) = E[X(t)]$

om vi antar stationaritet $\Rightarrow \ell = \lim_{t \to \infty} \ell(t)$

$$P_i = \lim_{t \to \infty} P(X(t) = i)$$

$X_q(t) =$ antal kunder i kön vid tiden t

$\ell_q(t) = E[X_q(t)]$

$\ell_q = \lim_{t \to \infty} \ell_q(t)$

$W_q = E[Q] =$ förväntad kötid

$W = E[Q + U] =$ förväntad tid i systemet

Betjäningsfaktorn = trafikintensiteten = $\frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \rho =$ ②

= andelen av tiden någon betjänas

där c = antal parallella betjäningsstationer

Vi förutsätter att $\rho < 1$

Anta $c = 1$ och att $\lambda = 2$ $\mu = 6$

$\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} =$

~~= andelen av tiden som någon betjänas~~

~~Om $c = 1$ blir $P(\text{stå i kö}) = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$~~

Spec.

$c = 1$: $\Rightarrow P(\text{stå i kö}) = 1 - P_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Antag att jag kommer till kön och

i genomsnitt väntar tiden W_q och sedan kommer

under den tiden hinner det i genomsnitt

komma $\lambda \cdot W_q$ personer

$\Rightarrow L_q = \lambda \cdot W_q$ = Littles formel

p.s.s gäller för hela systemet

$L = \lambda \cdot W$

har man en av L_q, L, W_q eller W

kan man få de övriga (om λ, μ, och c kända)

~~$L = L_q$ + förväntat antal som betjänas $= L_q +$~~

tiden i systemet = tiden i kön + tiden för betjäning

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

d.v.s $\ell = \lambda \cdot W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = \lambda\left[\frac{\ell_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right] =$

$$= \ell_q + \frac{\lambda}{\mu} = \ell_q + c \cdot \rho$$

D.v.s kan man en av $\ell, \ell_q; W, W_q$ kan man alla

Kendalls beteckningssystem

A / B / C

A = Ankomstprocessen
B = betjäningsfördelningen
C = antal stationer

M = Markovskt
G = allmänt

§ 16.1 G / G / C
§ 16.2 M / M / C
§ 16.3 M / G / C

Om Ankomstprocessen är Markovsk betyder det Poissonprocess
~~att antalet ankommande Elo-fördelninge~~
Om betjäningstiden är Markovsk betyder det expfördelade betjäningstider