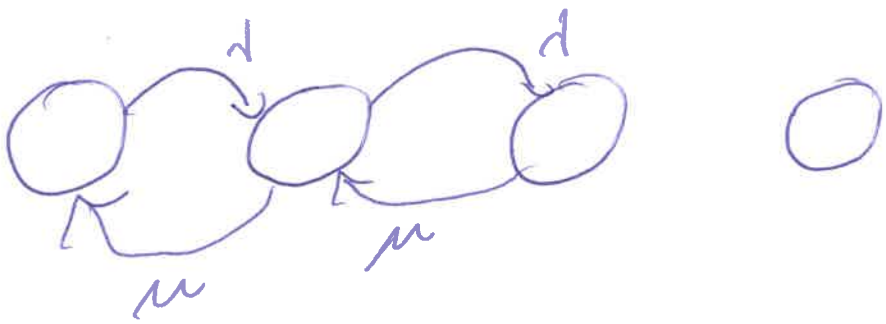
Föreläsning 6

M/M/1 - systemet



Detta är en födelse-dödsprocess

då har den den stationära fördelningen $\underline{\pi}$ där

$$\pi_j = \frac{\rho_j}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i}$$

$$\rho_0 = 1 \qquad \rho_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} = \frac{\lambda^2}{\mu^2}$$

$$\sum \rho_i = 1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots < \infty$$ om $\frac{\lambda}{\mu} < 1$

~~som konvergerar om $\frac{\lambda}{\mu} < 1$~~

och $$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i \rho_i} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{\lambda}} + \cancel{\frac{\mu_1}{\lambda^2}} + \frac{1}{\lambda}\left[1 + \frac{\mu}{\lambda} + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \dots\right] \to \infty$$

~~$\Rightarrow \pi$~~

(5)

$$\Rightarrow \pi_j = \frac{\rho i}{\sum \rho i} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^j(1-\rho)$$

jfr f 16.2 d.v.s $P_n = (1-\rho)\rho^n$

$$\ell = E[X(t)] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot \rho^j(1-\rho) = \left[\begin{array}{c}0<\rho<1 \\ 0<1-\rho<1\end{array}\right]$$

$$= \left[= \text{jfr ffg-fördeln där } p_X(h) = p\cdot(1-p)^{h-1} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p} \right] =$$

$$= \cancel{(1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} j\cdot\rho^j}$$

$$= \cancel{\quad}$$

$$= \rho \sum_{j=0}^{\infty} j\,\rho^{j-1}(1-\rho) = \rho\cdot\frac{1}{1-\rho}$$

$$\ell_q = \ell - c\cdot\rho = \ell - \rho = \rho\frac{1}{1-\rho} - \rho =$$

$$= \rho\left[\frac{1}{1-\rho} - \frac{1-\rho}{1-\rho}\right] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Repetition

1

M/M/1-system $\quad \underline{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots \pi_n \ldots)$

$$\pi_j = \frac{\rho^i}{\sum \rho^i} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{\sum \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^i (1-\rho)$$

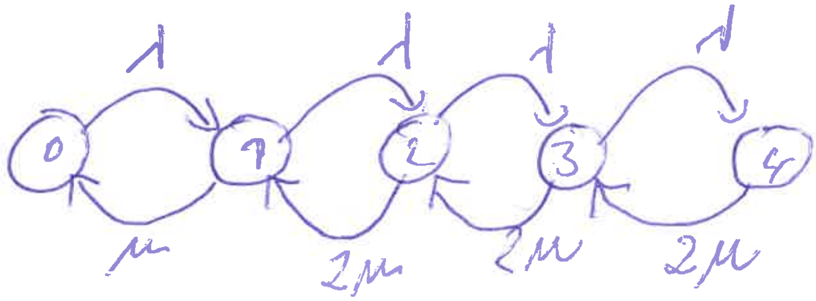
där $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

jfr, §16.2 d.v.s $\quad P_n = (1-\rho)\rho^n$

$$\ell = \rho \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

$$\ell_q = \ell - c \cdot \rho = \ldots = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

M/M/2 - system



$$\pi_n = \frac{\rho_n}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i} \qquad \rho_n = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$$

$$p_0 = 1 \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \quad p_2 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \quad ~~p_3~~ = \quad ②$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \qquad p_4 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda}{2\mu}$$

bezettingsfactor $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$

$$\sum p_i =$$

$$= 1 + \underbrace{2\rho + 2\rho^2 + 2\rho^3 + 2\rho^4 + \ldots}_{\text{geom. serie}}$$

$$\left[\text{ifv } a + ar^2 + ar^3 \ldots = a\frac{r^{n+1} - 1}{r-1} = \right.$$

$$\left. = k = \rho < 1 \quad a = 1 \right]$$

$$= 1 + \frac{2\rho}{1-\rho} = \frac{1 - \rho + 2\rho}{1-\rho} = \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{\frac{1+\rho}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1+\rho} = p_0 \quad \text{cfr } \S 16.2$$

$$\pi_1 = 2\rho \frac{(1-\rho)}{1+\rho} = p_1$$

$$\pi_2 = 2\rho^2 \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

cfr §16.2 $\quad p_n = \frac{2(1-\rho)\rho^n}{1+\rho}$

$$\ell = E[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_X(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{2(1-\rho)\rho^k}{1+\rho} =$$

$$= \frac{2}{1+\rho} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-\rho)\rho^k =$$

$$\left[\text{ffg-fördeln} \quad E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{1}{p} \right]$$

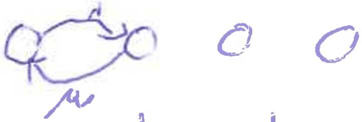
$$= \frac{2\rho}{1+\rho} \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^{k-1} = \langle 0 < \rho < 1 \rangle$$

jfr ffg-fördeln

$$= \frac{2\rho}{1+\rho} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)\rho^{k-1} = \frac{2\rho}{1+\rho} \cdot \frac{1}{(1-\rho)} =$$

$$= \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$

$$\ell = \ell_q + C\rho \Rightarrow \ell_q = \frac{2\rho}{1-\rho^2} - \frac{2\rho(1-\rho^2)}{1-\rho^2} = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2}$$



M/M/1 system

$\lambda_0 = \lambda \quad \lambda_1 = \lambda$

$\mu_1 = \mu \quad \mu_2 = \mu$

M/M/2 - system

$\lambda_0 = \lambda \quad \lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \lambda$

$\mu_1 = \mu \quad \mu_2 = 2\mu \quad \mu_3 = 2\mu$

M/M/3 - system

$\lambda_0 = \lambda \quad \lambda_1 = \lambda \quad \lambda_2 = \lambda$

$\mu_1 = \mu \quad \mu_2 = 2\mu \quad \mu_3 = 3\mu \quad \mu_4 = 3\mu$

M/M/c - system

$\lambda_0 = \lambda_1 \cdots = \lambda$

$$\mu_i = \begin{cases} i \cdot \mu \,; & 1 \le i \le c \\ c \cdot \mu \,; & i \ge c \end{cases}$$

Därav formlerna på sid 12

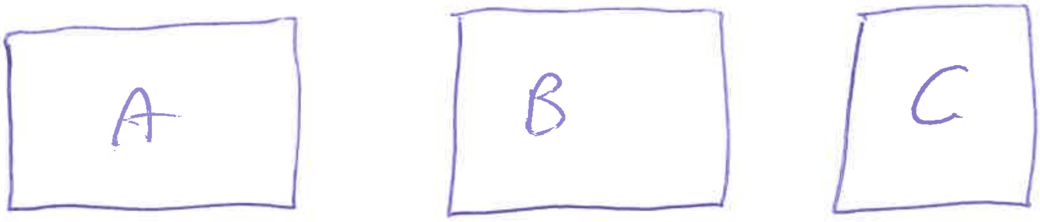
Peka på Förlust system i F.S.

Jackson nätverk

5

Anta t.ex ett köpcentrum med butiker A, B, C.

Till en butik Personer har hemma utifrån eller från en annan butik A



Vi ser varje butik som ett $M/M/c_i$ - system trots att ankomstprocessen inte är Po-fördelade men vi räknar som om de är de.

Λ_i = ankomstintensiteten till butik i = $\lambda_i + \sum_{\text{alla } j} P_{ji} \Lambda_j$

intensiteten utifrån

$M/M/c_i$

$\Lambda_i \quad \mu_i$

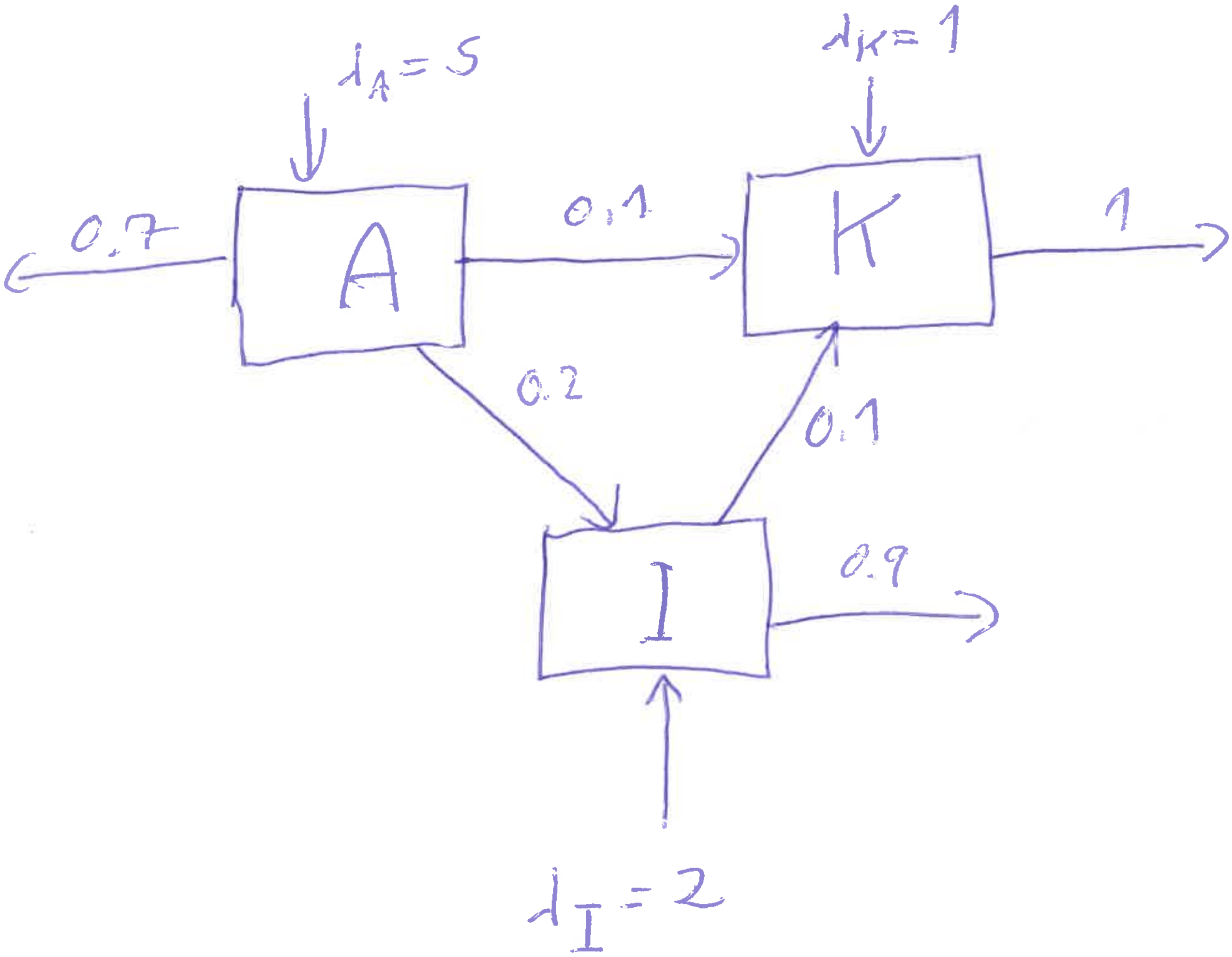
5 $\frac{1}{2}$

Uppgift 4

I ett sjukhus finns tre mottagningar; en akutmottagning, en infektionsklinik och en kirurgienhet. Utifrån kommande patienter anländer till de tre mottagningarna enligt oberoende poissonprocesser med intensiteter 5, 2 och 1 patient i timmen. Behandlingstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärden 10, 15 och 30 minuter. En patient som behandlats i akutmottagningen remitteras till infektionskliniken med sannolikhet 0.2, till kirurgenheten med sannolikhet 0.1, men lämnar sjukhuset med sannolikhet 0.7. En patient som kommer till infektionskliniken remitteras efter behandling till kirurgienheten med sannolikhet 0.1, i annat fall försvinner vederbörande från sjukhuset. En patient som anlänt till kirurgienheten försvinner efter behandling från sjukhuset. Beräkna förväntad antal patienter på sjukhuset vid "asymptotisk tid". (10 p)

Gammal tenta uppg [redacted] [redacted]

6



$$\frac{1}{\mu_A} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{\mu_I} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{\mu_K} = \frac{1}{2}$$

$P_{AI} = 0.2 \qquad P_{AK} = 0.1$

$P_{IK} = 0.1 \qquad P_{IA} = 0$

$P_{KI} = 0 \qquad P_{KA} = 0$

$$E[\text{Antal patienter}] = E(X_A) + E(X_I) + E[\bar{X}_K]$$

$$= l_A + l_I + l_K \qquad \text{F.S. §16.1} \Rightarrow l = c\rho + l_q$$

Vi har tre st M/M/1-system

l_{qA} l_{qI} och l_{qK} fås från §16.2

$$l_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad \text{Här är t.ex } \rho_A = \frac{\Lambda_A}{\mu_A}$$

Vi behöver $\Lambda_A, \Lambda_K\ \Lambda_I$

§16.4 $\quad \Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{m} p_{ji}\Lambda_j$

$$\Rightarrow \Lambda_A = 5 + 0\Lambda_K + 0\Lambda_I$$

$$\Lambda_I = 2 + 0.2 \cdot \Lambda_A + 0\Lambda_K$$

$$\Lambda_K = 1 + 0.1\Lambda_A + 0.1\Lambda_I$$

$$\Rightarrow \Lambda_A = 5 \qquad \Lambda_I = 2 + 0.25 = 3$$

$$\Lambda_K = 1 + 0.1 \cdot 5 + 0.1 \cdot 3 = 1.8$$

$$\rho_A = \frac{5}{6} \qquad \rho_I = \frac{3}{4} \qquad \rho_K = \frac{1.8}{2}$$

8

$$\ell = \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho(1-\rho)+\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

2) $\ell_A + \ell_I + \ell_K = \dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} + \dfrac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} + \dfrac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}} =$

$= 5 + 3 + 9 = 17$

Peka på §16.3

74

(10)

U = betjäningstiden

$U = U_1 + U_2$

$U_1 = \frac{1}{3}$

$U_2 \in \exp(1)$

$E(U) = \frac{1}{3} + E(U_1) = \frac{4}{3}$

$V(U) = V(U_1 + U_2) = V(U_2) = 1$

ρ = trafikintensiteten = $\dfrac{\text{antal som kommer/min}}{\text{antal som betjänas/min}}$ =

$$= \frac{\frac{1}{2}}{E(U) = \cancel{\frac{4}{3}}\ \frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow l_q = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2\left(1 - \frac{2}{3}\right)} \cdot \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right) = \ldots \frac{25}{24}$$

$$l = \rho + l_q = \frac{2}{3} + \frac{25}{24} = \frac{41}{24} \approx 1.71$$