Teori du inte hittar i formel- och tabellsamlingen

Nils Lundqvist (Assistent)

December 14, 2022

Inledning och upplägg

Långt från all teori som behövs för att klara tentan finns i formel- och tabellsamlingen. Nedan följer en komplettering som är till för att underlätta under tenta-plugget. Detta är inte en komplett sammanfattning av all teori i boken, men innehåller större delen av det man behöver kunna. Allt som finns tillgängligt i formel- och tabellsamlingen utelämnas här. Varje del avser det kapitel i boken i vilket tillhörande teori förklaras.

Kapitel 2

Grundläggande begrepp

Resultatet av ett slumpmässigt försök kallas för ett utfall.
Mängden av möjliga utfall kallas för utfallsrummet och betecknas ofta med Ω.
Detta utfallsrum kan vara diskret eller kontinuerligt.
En händelse är en samling av utfall.

Ta ett tärningskast som det slumpmässiga försöket som ett exempel:
Utfallsrummet för kastet bildas av den diskreta mängden $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
En händelse skulle kunna vara att få ett jämnt antal prickar vid kastet. Denna händelse bildas av den diskreta mängden $\{2, 4, 6\}$.

Mängdlära

För två mängder A och B gäller följande notationer med förklaringar:

$$A \cap B : \text{A och B}$$
$$A \cup B : \text{A och eller B}$$

Sannolikhetsmåttet

Grundaxiom för sannolikhetsmåttet $P(\cdot)$:

Axiom 1. För varje händelse A gäller att $0 \leq P(A) \leq 1$
Axiom 2. För hela utfallsrummet Ω gäller att $P(\Omega) = 1$

Olika samband för sannolikheter

Oförenliga/disjunkta händelser

Om två händelser A och B är oförenliga/disjunkta gäller att:

$$P(A \cap B) = 0 \tag{1}$$

Detta medför slutsatsen att disjunkta händelser inte kan inträffa samtidigt.

Komplementhändelse

Komplementhändelsen till händelse A betecknas med A^* och definierar mängden som blir över om man utesluter händelsen A från utfallsrummet. För komplementhändelser gäller att:

$$P(A^*) = 1 - P(A) \tag{2}$$

Alternativt:

$$P(A) + P(A^*) = 1 \tag{3}$$

Detta medför den naturliga slutsatsen att antingen A eller A^* måste inträffa.

Additionsformeln

För två händelser gäller att:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{4}$$

Notera att om händelserna A och B är **disjunkta** ($P(A \cap B) = 0$) så gäller att:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

Likformigt sannolikhetsmått

Om ett likformigt sannolikhetsmått föreligger vid ett slumpmässigt försök innebär det att sannolikheten är lika stor för varje utfall att inträffa. Detta gäller vid diskreta utfallsrum. Notera att detta inte innebär att sannolikheten är lika stor för varje händelse inom utfallsrummet då en händelse är definierad som en samling av utfall.

Klassiska sannolikhetsdefinitionen

Den klassiska sannolikhetsdefinitionen säger att sannolikheten för en händelse vid ett likformigt sannolikhetsmått definieras av kvoten mellan antalet för händelsen gynnsamma utfall och det totala antalet möjliga utfall.

Kombinatorik

Multiplikationsprincipen

Multiplikationsprincipen säger att om åtgärd 1 kan utföras a_1 sätt och åtgärd 2 på a_2 sätt, så finns det $a_1 \cdot a_2$ att utföra båda åtgärderna. Detta kan generaliseras för en ett godtyckligt antal åtgärder enligt samma princip vilket gör att om åtgärd i kan utföras på a_i olika sätt $(i = 1, ..., n)$, finns det $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ sätt att utföra alla åtgärderna.

Dragning med och utan återläggning, med och utan hänsyn till ordning

Nedan sammanfattas antal sätt att dra k element ur n med och utan återläggning och hänsyn till ordning.

	Med hänsyn till ordning	Utan hänsyn till ordning
Utan återläggning	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
Med Återläggning	n^k	-

Fallet med återläggning och utan hänsyn till ordning tas inte upp i boken och därför inte heller här.

Betingade sannolikheter och oberoende händelser

Grunddefinition

Den betingade sannolikheten för A givet B noteras och definieras enligt:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{6}$$

Detta ger sannolikheten att A inträffar förutsatt att B inträffat.

Komplementhändelser i betingade sannolikheter

Det gäller för händelser A och B att:

$$P(A^* \mid B) = 1 - P(A \mid B) \tag{7}$$

Det gäller också generellt att:

$$P(A^* \mid B^*) \neq 1 - P(A^* \mid B) \tag{8}$$

Det är alltså viktigt att inte förväxla sannolikheterna i ekvation (7) och (8).

Lagen om total sannolikhet

Om händelserna $H_1, ..., H_n$ är parvis disjunkta samt att $H_1 \cup ... \cup H_n = \Omega$ så gäller för en godtycklig händelse A att:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P(H_i) \tag{9}$$

Bayes sats

Under samma krav på händelser $H_1, ..., H_n$ gäller för en godtycklig händelse A och H_j att:

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P(H_i)} \tag{10}$$

Något värt att notera är att någon händelse B och dess komplementhändelse B^* tillsammans uppfyller kraven som ställs på händelserna $H_1, ..., H_n$ - de är disjunkta och uppfyller att $B \cup B^* = \Omega$.

Oberoende händelser

Om händelser A och B är oberoende gäller att:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{11}$$

Detta leder till det intuitiva resultatet att, givet att A och B är oberoende, så gäller att:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \tag{12}$$

Uttryckt med ord: Sannolikheten att A inträffar påverkas inte av det faktum att B inträffat. Därav uttrycket oberoende händelser.

Om händelser A och B är oberoende så är även A^* och B^*, A och B^* och A^* och B oberoende.

Kapitel 3

Diskreta Stokastiska Variabler

Sannolikhetsfunktion

Sannolikhetsfunktionen för en diskret stokastisk variabel X betecknas $p_X(x)$ och är definierad enligt:

$$p_X(x) = P(X = x) \tag{13}$$

Det måste för en sådan variabel gälla att:

$$\sum_{x \in \Omega_X} p_X(x) = 1 \tag{14}$$

Fördelningsfunktion

Fördelningsfunktionen $F_X(x)$ definieras enligt:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{15}$$

Denna kan utnyttjas för att beräkna sannolikheter som är formulerade enligt $P(a < X \leq b)$, där $a < b$. Det gäller att:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \tag{16}$$

Följande gränsvärden måste även hålla för fördelningsfunktionen:

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \tag{17}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \tag{18}$$

Notera att ekvation (17) och (14) i praktiken beskriver samma sak.

Kontinuerliga Stokastiska Variabler

Täthetsfunktion

För en kontinuerlig stokastisk variabel X uppfyller dess täthetsfunktion $f_X(x)$ att:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx \tag{19}$$

Täthetsfunktionen uppfyller även:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) \tag{20}$$

där $F_X(x)$ är fördelningsfunktionen som definierats i ekvation (15). Detta gör att:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \tag{21}$$

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \tag{22}$$

Kapitel 4

Fördelningsfunktion

Fördelningsfunktionen $F_{X,Y}(x, y)$ för en tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) definieras enligt:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{23}$$

där en förändring i notationen för ett snitt introduceras i form av ett kommatecken.

Diskret Tvådimensionell Stokastisk Variabel

Sannolikhetsfunktion

Sannolikhetsfunktionen $p_{X,Y}(x, y)$ för en diskret tvådimensionell stokastisk variabel definieras enligt:

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) \tag{24}$$

Kontinuerlig Tvådimensionell Stokastisk Variabel

Täthetsfunktion

Om funktionen $f_{X,Y}(x,y)$ uppfyller att:

$$P((X,Y) \in A) = \int\int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy \tag{25}$$

för alla A, säges (X,Y) vara en kontinuerlig tvådimensionell stokastisk variabel och $f_{X,Y}(x,y)$ kallas täthetsfunktionen för (X,Y).

Oberoende Stokastiska Variabler

Definition

De stokastiska variablerna X och Y kallas oberoende om:

$$P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C)P(Y \in D) \tag{26}$$

för alla mängder C och D. Detta kan generaliseras för fler variabler. De stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ kallas oberoende om:

$$P(X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n) \tag{27}$$

för alla mängder $A_1, ..., A_n$.

Följder

Givet definitionen måste det för att stokastiska variabler $X_1, ..., X_n$ ska vara oberoende gälla att:

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_n}(x_n), \text{ för alla } x_1, ..., x_n \tag{28}$$

och att i det diskreta fallet:

$$p_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_n}(x_n), \text{ för alla } x_1, ..., x_n \tag{29}$$

samt i det kontinuerliga fallet:

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n), \text{ för alla } x_1, ..., x_n \tag{30}$$

Max-funktionen

Max-funktionen $\max(X_1, ...X_n)$ ger det största utfallet av de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$. För $Z = \max(X_1, ..., X_n)$ där $X_1, ..., X_n$ är inbördes oberoende kan fördelningsfunktionen för Z, $F_Z(z)$, härledas:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\max(X_1, ..., X_n) \leq z) = P(X_1 \leq z, ..., X_n \leq z) =$$
$$\{\text{på grund av oberoende}\} = P(X_1 \leq z) \cdots P(X_n \leq z) = F_{X_1}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

Alltså, om $Z = \max(X_1, ...X_n)$ där $X_1, ..., X_n$ är inbördes oberoende, gäller att:

$$F_Z(z) = F_{X_1}(z) \cdots F_{X_n}(z) \tag{31}$$

Min-funktionen

Min-funktionen $\min(X_1, ...X_n)$ ger det minsta utfallet av de stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$. För $Z = \min(X_1, ..., X_n)$ där $X_1, ..., X_n$ är inbördes oberoende kan fördelningsfunktionen för Z, $F_Z(z)$, härledas:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\min(X_1, ..., X_n) \leq z) = 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) > z) =$$
$$1 - P(X_1 > z, ..., X_n > z) = \{\text{på grund av oberoende}\} = 1 - P(X_1 > z) \cdots P(X_n > z) =$$
$$1 - (1 - P(X_1 \leq z)) \cdots (1 - P(X_n \leq z)) = 1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z))$$

Alltså, om $Z = \min(X_1, ...X_n)$ där $X_1, ..., X_n$ är inbördes oberoende, gäller att:

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)) \tag{32}$$

Kapitel 5

Väntevärde

Definition

Väntevärdet för en stokastisk variabel X kan ses som en beräkning av masscentrum för variabelns sannolikhets- eller täthetsfunktion. Det definieras enligt:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{k \in \Omega_X} k p_X(k) \text{ (diskret fall)} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \text{ (kontinuerligt fall)} \end{cases} \tag{33}$$

Om $Y = g(X)$ gäller att:

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{k \in \Omega_X} g(k) p_X(k) \text{ (diskret fall)} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \text{ (kontinuerligt fall)} \end{cases} \tag{34}$$

där (34) till exempel används flitigt för att beräkna termen $E(X^2)$ i formeln för variansen $V(X)$ (som står i formelsamlingen). Man får att:

$$E(X^2) = \begin{cases} \sum_{k \in \Omega_X} k^2 p_X(k) \text{ (diskret fall)} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \text{ (kontinuerligt fall)} \end{cases} \tag{35}$$

Räkneregler

För stokastiska variabler $X_1, ..., X_n$ gäller att väntevärdet för en linjärkombination av dem kan utvecklas enligt:

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b \tag{36}$$

och variansen av en linjärkombination av dem kan utvecklas enligt:

$$V(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} a_j a_k C(X_j, X_k) \tag{37}$$

där $C(X_j, X_k)$ är kovariansen mellan X_j och X_k.
Om variablerna $X_1, ..., X_n$ är inbördes oberoende gäller att:

$$V(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) \tag{38}$$

då $C(X_j, X_k) = 0$ för alla $1 \leq j < k \leq n$.
Om stokastiska variablerna $X_1, ..., X_n$ är inbördes oberoende gäller också att:

$$E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n) \tag{39}$$

Stora Talens Lag

Om $X_1, ..., X_n$ är oberoende och likafördelade stokastiska variabler, var och en med väntevärde μ, där

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

kommer det, för alla $\epsilon > 0$, gälla att:

$$P(\mu - \epsilon < \bar{X}_n < \mu + \epsilon) \rightarrow 1 \text{ då } n \rightarrow \infty \tag{40}$$

Kapitel 7

Binomialfördelningen

Förekomst och tolkning

Om sannolikheten är p att händelse A inträffar i ett enskilt försök kommer antalet gånger A inträffar vid n oberoende försök vara binomialfördelat. Om den stokastiska variabeln X är antalet gånger som A inträffar gäller då att:

$$X \in Bin(n, p)$$

Nedan följer ett exempel på ett binomialfördelat fenomen. Ett scenario och en tolkning presenteras.

Exempel
<u>*Scenario:*</u> Vid ett tärningskast är sannolikheten att få en sexa 1/6. Jag testar att kasta tärningen 20 gånger. Hur är antalet gånger jag får en sexa fördelat?

<u>*Tolkning:*</u> Eftersom sannolikheten att få en sexa är samma vid varje försök oberoende av utfall vid tidigare försök (1/6) och jag utför 20 försök måste antalet sexor vara $Bin(20, 1/6)$.

Teori

Om $X \in Bin(n_1, p)$ och $Y \in Bin(n_2, p)$, där X och Y är oberoende, gäller att:

$$X + Y \in Bin(n_1 + n_2, p) \tag{41}$$

Hypergeometriska fördelningen

Förekomst och tolkning

En population av storlek N innehåller endast Np element med egenskapen A och man tar slumpmässigt ut n element utan återläggning. Om den stokastiska variabeln X är antalet element i vårt stickprov med egenskapen A så gäller då att:

$$X \in Hyp(N, n, p)$$

. Nedan följer ett exempel på ett hypergeometriskt fördelat fenomen. Ett scenario och en tolkning presenteras.

Exempel
Scenario: I Sverige bor det 10 miljoner människor. Av Sveriges invånare är det endast 400 000 personer som kan busvissla. Om vi tar ett slumpmässigt stickprov av 10 000 individer bland Sveriges invånare, hur kommer antalet av dessa som kan busvissla vara fördelat?

Tolkning: Den större populationen som vi plockar ur är antalet personer som bor i Sverige - alltså N =10 000 000. Att 10 000 individer plockas antyder att dragningen sker utan återläggning (vilket är ett krav) - alltså n =10 000. Då p står för den relativa frekvensen av populationen med den sökta egenskapen fås p genom $p = 400000/10000000 = 0.04$. Antalet personer som kan busvissla i stickprovet är alltså $Hyp(10000000, 10000, 0.04)$.

Poissonfördelningen

Förekomst och tolkning

Poissonfördelningen används ofta för att modellera hur ofta en händelse inträffar under ett tidsintervall av given längd. Det finns ingen kognitiv metod för att härleda hur något är Poissonfördelat på samma sätt som för Binomialfördelningen och Hypergeometriska fördelningen.

Teori

Om $X_1 \in Po(\mu_1), ..., X_n \in Po(\mu_n)$ är inbördes oberoende gäller att:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \in Po(\sum_{i=1}^{n} \mu_i) \tag{42}$$

Kapitel 11

Punktskattning

Notation

En punktskattning $\theta^*_{obs} = \theta^*(x_1, ..., x_n)$ av en parameter θ är en funktion av mätdata $x_1, ..., x_n$. Dessa mätdata ses som utfall av stokastiska variabler $X_1, ..., X_n$ vilkas fördelning beror på θ. Punktskattningen θ^*_{obs} är ett utfall av skattningsfunktionen $\theta^* = \theta^*(X_1, ..., X_n)$.

Väntevärdesriktighet

En skattningsfunktion θ^* säges vara väntevärdesriktig om den har väntevärde θ, alltså:

$$E(\theta^*) = \theta \tag{43}$$

för alla $\theta \in \Omega_\Theta$, där Ω_Θ är parameterrummet. Ω_Θ är mängden värden på parametern som tillåts av fördelningarna för $X_1, ..., X_n$.

Effektivitet

Om skattningsfunktioner θ^* och $\hat{\theta}$ båda är väntevärdesriktiga, gäller att θ^* är effektivare än $\hat{\theta}$ om:

$$V(\theta^* \leq \hat{\theta}) \tag{44}$$

för alla $\theta \in \Omega_\Theta$ och med sträng olikhet för något $\theta \in \Omega_\Theta$

Skattning av väntevärde

Stickprovsmedelvärdet $\bar{x}$ är en väntevärdesriktig skattning av väntevärdet.

Skattning av varians

Stickprovsvariansen s^2 är en väntevärdesriktig skattning av variansen.

Kapitel 12

Intervallskattning av väntevärde baserat på ett normalfördelat stickprov

Om $x_1, ..., x_n$ är ett slumpmässigt stickprov från $N(\mu, \sigma)$ är:

$$I_\mu = \bar{x} \pm \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ (då } \sigma \text{ är känd)} \tag{45}$$

$$I_\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ (då } \sigma \text{ är okänd)} \tag{46}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för μ med konfidensgrad $1 - \alpha$.

Intervallskattning av väntevärde baserat på två normalfördelade stickprov

Stickprov med samma varians

Om $x_1, ..., x_{n_1}$ och $y_1, ..., x_{n_2}$ är slumpmässiga och av varandra oberoende stickprov från $N(\mu_1, \sigma)$ och $N(\mu_2, \sigma)$ är:

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \tag{47}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1 - \alpha$ då σ är känd, och:

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \tag{48}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1 - \alpha$ då σ är okänd och där s_x^2 och s_y^2 är stickprovsvarianserna av $x_1, ..., x_{n_1}$ och $y_1, ..., y_{n_2}$ respektive.

Stickprov med olika varians

Om $x_1, ..., x_{n_1}$ och $y_1, ..., x_{n_2}$ är slumpmässiga och av varandra oberoende stickprov från $N(\mu_1, \sigma_1)$ och $N(\mu_2, \sigma_2)$ är:

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{49}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1 - \alpha$ då σ_1 och σ_2 är kända, och:

$$I_{\mu_1 - \mu_2} = \bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \tag{50}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med konfidensgrad $1-\alpha$ då σ_1 och σ_2 är okända och där s_x^2 och s_y^2 är stickprovsvarianserna av $x_1, ..., x_{n_1}$ och $y_1, ..., y_{n_2}$ respektive.

Intervallskattning av parameter p för Binomialfördelad variabel

För en stokastisk variabel $X \in Bin(n, p)$ är:

$$I_p = \frac{x}{n} \pm \lambda_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{x}{n}(1 - \frac{x}{n})}{n}} \tag{51}$$

ett tvåsidigt konfidensintervall för p med approximativ konfidensgrad $1-\alpha$. Här är x en observation av X. Intervallet bygger på skattningsfunktionen $p^* = \frac{X}{n}$ och förutsätter generellt att n är stort.

Ensidiga konfidensintervall

För alla formler ovan gäller att om man istället vill formulera ett ensidigt konfidensintervall med konfidensgrad (eller approximativ konfidensgrad i fallet (51)) $1 - \alpha$ under samma förutsättningar för väntevärdet, säg θ, så får man:

$$I_\theta = \begin{cases} (\theta^*_{obs} - \lambda_\alpha D, \infty) \text{ (under ifrån begränsat)} \\ \\ (-\infty, \theta^*_{obs} + \lambda_\alpha D) \text{ (ovan ifrån begränsat)} \end{cases} \tag{52}$$

för metod baserad på normalfördelat stickprov med känd varians, eller:

$$I_\theta = \begin{cases} (\theta^*_{obs} - t_\alpha(f) D^* obs, \infty) \text{ (under ifrån begränsat)} \\ \\ (-\infty, \theta^*_{obs} + t_\alpha(f) D^*_{obs}) \text{ (ovan ifrån begränsat)} \end{cases} \tag{53}$$

för metod baserad på normalfördelat stickprov med okänd varians, eller:

$$I_\theta = \begin{cases} (\theta^*_{obs} - \lambda_\alpha D^*_{obs}, \infty) \text{ (under ifrån begränsat)} \\ \\ (-\infty, \theta^*_{obs} + \lambda_\alpha D^*_{obs}) \text{ (ovan ifrån begränsat)} \end{cases} \tag{54}$$

för metod baserad på ett approximativt normalfördelat stickprov.

Den enda skillnaden blir alltså att man lägger all utelämnad sannolikhetsmassa α i en ände, istället för att dela upp den i två lika stora ändar.

Kapitel 13

P-värdesmetoden

Denna metod går ut på att givet ett hypotestest med testvariabel $t(\mathbf{x})$ beräkna sannolikheten $P(\text{"}t(\mathbf{X})$ är minst lika extrem som $t(\mathbf{x})\text{"})$ givet att nollhypotesen är sann. Att $t(\mathbf{X})$ är mer extrem än $t(\mathbf{x})$ innebär alla utfall på $t(\mathbf{X})$ utöver $t(\mathbf{x})$ som ger ytterligare stöd till mothypotesen. Denna sannolikhet är det som kallas för P-värdet. Är detta värde mindre än vald signifikansnivå blir följden att förkasta nollhypotesen till förmån för mothypotesen.
Att beräkna P-värdet kräver eftertanke då den mängden som motsvarar mer extrema värden på $t(\mathbf{X})$ beror på den bakomliggande fördelningen till testvariabeln och hur mothypotesen är definierad.

Exempel
<u>*Scenario:*</u> Min kompis påstår att han träffar ett straffkast i basket med sannolikhet $p = 0.8$. Jag tvivlar på detta då han missar ganska ofta. För att undersöka nollhypotesen $p = 0.8$ mot den alternativa hypotesen $p < 0.8$ tvingar jag honom att kasta upprepade straffkast fram till och med att han träffar för första gången. Jag noterar att han sätter bollen först på det sjätte kastet. Hur kan jag beräkna P-värdet för mitt test?

<u>*Tolkning:*</u> Som testvariabel väljs x som är ett utfall från $X \in ffg(p)$ där p är parametern som jag vill testa. Jag observerar $x = 6$. Alltså har vi att $t(\mathbf{x}) = 6$. Nu vill jag för att bestämma P-värdet, alltså beräkna sannolikheten att jag observerar $x = 6$ eller något mer "extremt" på min testvariabel. I det här fallet ger ju högre värden på X större stöd till mothypotesen $H_1 : p < 0.8$ (ju lägre värde på p, desto fler försök bör det ju ta för min kompis att sätta bollen i korgen). Alltså söker jag sannolikheten $P(X \geq 6)$ då nollhypotesen är sann. Jag får:

$$P(X \geq 6 \mid p = 0.8) = 1 - P(X \leq 5 \mid p = 0.8) =$$
$$1 - \sum_{k=1}^{5} 0.8(1-0.8)^{k-1} = 1 - \frac{0.8(0.2^5 - 1)}{0.2 - 1} = 0.00032$$

Datan ger alltså starkt stöd för att min kompis har överskattat sin talang.

Enkelt test av väntevärde för normalfördelat stickprov

Om man vill genomföra ett enkelt hypotestest av väntevärdet hos ett normalfördelat stickprov $x_1, ..., x_n$ som ses som oberoende utfall från $N(\mu, \sigma)$ på signifikansnivån α kan man istället för att ställa upp ett konfidensintervall för väntevärdet använda sig av en testvariabel $t(x)$. För ett sådant test har vi tre olika fall:

Fall 1
Vi vill testa: $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Då blir utfallet av testet, baserat på ett stickprov med känd standard avvikelse σ och med testvariabeln $t(x) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$:

$$\begin{cases} |\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| > \lambda_{\alpha/2} \rightarrow \text{Förkasta } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \\ \\ |\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}| < \lambda_{\alpha/2} \rightarrow \text{Förkasta ej } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \end{cases} \tag{55}$$

alternativt för ett stickprov med okänd standardavvikelse σ och med testvariabeln $t(x) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$:

$$\begin{cases} |\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}| > t_{\alpha/2}(n-1) \rightarrow \text{Förkasta } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \\ \\ |\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}| < t_{\alpha/2}(n-1) \rightarrow \text{Förkasta ej } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \end{cases} \tag{56}$$

Fall 2
Vi vill testa: $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_1 : \mu < \mu_0$
Då blir utfallet av testet, baserat på ett stickprov med känd standard avvikelse σ och med testvariabeln $t(x) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$:

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -\lambda_{\alpha} \rightarrow \text{Förkasta } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \\ \\ \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > -\lambda_{\alpha} \rightarrow \text{Förkasta ej } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \end{cases} \tag{57}$$

alternativt för ett stickprov med okänd standardavvikelse σ och med testvariabeln $t(x) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$:

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{\alpha}(n-1) \rightarrow \text{Förkasta } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \\ \\ \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > -t_{\alpha}(n-1) \rightarrow \text{Förkasta ej } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \end{cases} \tag{58}$$

Fall 3
Vi vill testa: $H_0 : \mu = \mu_0$ mot $H_1 : \mu > \mu_0$
Då blir utfallet av testet, baserat på ett stickprov med känd standard avvikelse σ och med testvariabeln $t(x) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$:

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \lambda_\alpha \rightarrow \text{Förkasta } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \\ \\ \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \lambda_\alpha \rightarrow \text{Förkasta ej } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \end{cases} \tag{59}$$

alternativt för ett stickprov med okänd standardavvikelse σ och med testvariabeln $t(x) = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$:

$$\begin{cases} \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1) \rightarrow \text{Förkasta } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \\ \\ \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1) \rightarrow \text{Förkasta ej } H_0 \text{ till förmån för } H_1 \end{cases} \tag{60}$$