Förelasning 4

Kap 3 Förel 3

Sid 7

$\boxed{\text{Räkna 3.9}}$ och berätta om Po-fördelningen

Def: $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$

Definiera täthetsfunktionen $f_X(x)$

$\boxed{\text{Räkna 3.12}}$ Berätta om U-fördelningen

ex 3.8 sid 59

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = F_X(t)$$

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$

~~Räkna 3.21~~

se några poster framåt

~~Räkna 3.22~~ räkna eget ex och berätta om exp-fördelningen.

Antag att vi har ett tidsintervall

där det i genomsnitt ska inträffa μ händelser och att det i varje tidpunkt är lika stor chans att det händer något

~~Då är P sannolikheten för k händelser~~

och X är antalet händelser som inträffar

då är $p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$

inträffar händelser med intensitet λ

X = antal händelser mellan 0 och t

T = tiden till nästa händelse inträffar

$T \in \exp(\lambda)$

Sid 8

$X \in Po(\lambda t)$

$$P_X(x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\text{händelsen inträffar innan } t) =$$

$$= P(\text{minst en händelse inträffar innan } t) =$$

$$= 1 - P(\text{noll händelser inträffar innan } t) =$$

$$= 1 - p_X(0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

exponentialfördelningen vid väntetider, saker som går sönder

Exponentialfördelningen har ingert minne

Sannolikheten att en komponent som överlevt tiden t även skall överleva tiden $t+x$ är samma som sannolikheten att den överlever från till x

D.v.s $P(X > t+x \mid X > t) = P(X > x)$

Bevis $P(X > t+x \mid X > t) = \frac{P(X > t+x \cap X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+x)}{P(X > t)} =$

$$= \frac{1 - F_X(t+x)}{1 - F_X(t)} = \frac{1 - [1 - e^{-\lambda(t+x)}]}{1 - [1 - e^{-\lambda t}]} = \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x}$$

$$= 1 - F_X(x) = P(X > x)$$

Normalfördelningen $\quad X \in N(\mu, \sigma)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Likformig fördelning

Ex 3.8 och 3.9

Exponentialfördelningen som inget minne

Anta att en lampas brinntid är T $T \in exp(\lambda t)$

~~Anta att vi precis har satt in lampan, Då~~

Anta att vi räknar tiden fr.o.m att vi satt på ~~lampan~~ den nya lampan.

Då är $P(T > 100) = 1 - F_T(100) = 1-(1-e^{-\lambda \cdot 100})$
$= e^{-\lambda \cdot 100}$

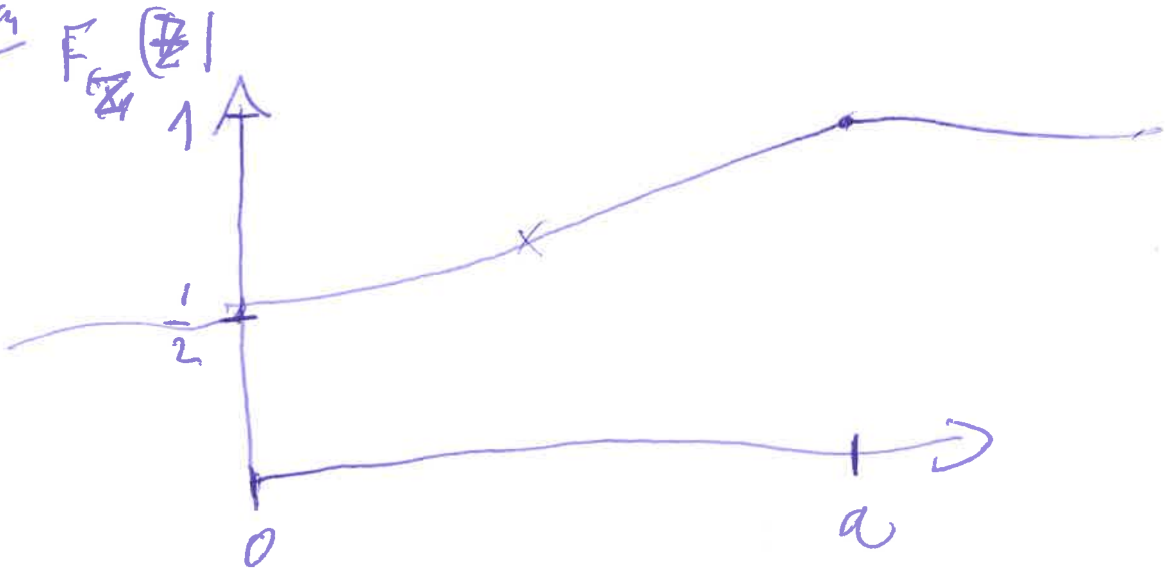
men anta att vi först kommer in i rummet 50 timmar efter att lampan satts på och räknar tiden fr.o.m att vi kom in i rummet.
Då är $P(T>100)$ fortfarande $e^{-\lambda \cdot 100}$

<u>Bevis:</u> vi vill visa att $P(X > t+X \mid X > t)$
$= P(X > x)$

$$P(X>t+x \mid X>t) = \frac{P(X>t+x \cap X>t)}{P(X>t)} =$$

$$= \frac{P(X>t+x)}{P(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x} = P(X>x)$$

Ex 3.14



$$P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(Z_4 \leq a) = 1$$

$0 \leq z \leq a$: $F_{Z_4}(z) =$ rät linje $= \frac{1}{2} + kz$

$z = a \Rightarrow F_{Z_4}(z) = 1 = \frac{1}{2} + k \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2a}$

$\Rightarrow F_{Z_4}(z) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot z}{2a} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{a}\right)$

~~ex 3.9~~

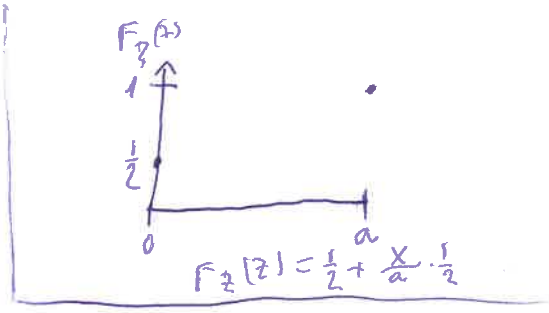
Blandad fördelning

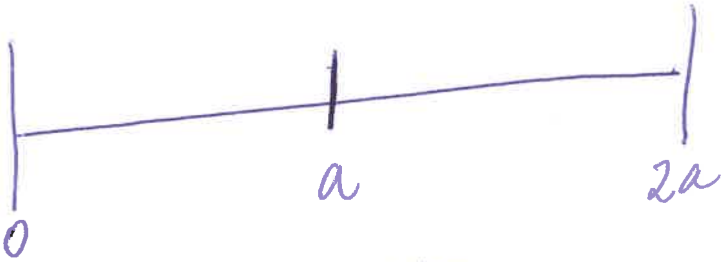
$$P(X=0)=\frac{1}{2}$$

ex 3.54

Antag noll

$$\cancel{P(X \neq 0) = \frac{1}{2}}$$





$$\cancel{P(X \leq x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a}}$$

Antag rött $\quad P(0 < X < a) = \frac{1}{2}$

$$X \in U[0,a] \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{a-0}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{a}\,dt = \frac{x}{a}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x \mid grönt) \cdot P(grönt) + P(X \leq x \mid rött) \cdot P(rött)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{2}$$

sammanfattningsvis

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{2a} & 0 < x \leq a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$

Funktioner av stokastiska variabler

Sid 10

Diskreta fallet Anta att $Y = g(X)$

$$\Rightarrow p_Y(k) = \sum_{j:\, g(j)=k} p_X(j)$$

ex $Y = X^2$

j	-1	0	1
$p_X(j)$	0.4	0.5	0.1

$$p_Y(0) = p_X(0) = 0.5$$
$$p_Y(1) = p_X(-1) + p_X(+1) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

Kont fallet ex $Y = \sqrt{X}$ $f_X(x)$ given

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\sqrt{X} < y) =$$
$$= P(X < y^2) = F_X(y^2)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y^2) = \cancel{2y\, f_X(y^2)}$$
$$= [x = y^2] = \frac{dF_X}{dx}\frac{dx}{dy} = 2y \cdot f_X(y^2)$$

~~Hur man jobbar praktiskt~~

~~Vi har $f_X(x)$ och $Y = g(X)$~~

~~Vi söker $f_Y(y)$~~

~~Ta först fram $F_Y(y)$ och derivera sedan.~~

~~$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(\sqrt{X} < y) =$~~

~~$= P(X \le y^2) = \int_{-\infty}^{y^2} f_X(x)\,dx$~~

$f_Y(y)$ är sedan derivatan av detta

Hur jobbar man praktiskt.

Anta att vi har $f_X(x)$ och $g(X)$

och $Y = g(X)$

vi söker $f_Y(y)$ fös of X

Ta först fram $F_Y(y)$, och derivera sedan

ex 3.19 $\quad Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X \quad X \in U[0,1]$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln X \leq y\right) =$$

$$= P(\ln X \geq -\lambda y) = P(X > e^{-\lambda y}) = \left\{ \begin{matrix} X \in U(0,1) \\ 0 < x < 1 \end{matrix} \right.$$

$$= \int_{e^{-\lambda y}}^{1} f_X(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda y} \qquad 0 < y < \infty$$

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \qquad y > 0$$

Slumptalsgenerering

Vi slumpar fram ett tal likformigt mellan 0 och 1

$X \in U[0,1] \Rightarrow X$

ex Anta nu att vi vill ha ett slumptal ~~efter~~ $Y \in exp(\lambda)$

Börja med slumptalet $X = F_Y(Y) = P(Y \leq y)$

som också ligger mellan 0 och 1

$$= \int_0^Y \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^Y = 1 - e^{-\lambda Y} = X$$

$$e^{-\lambda Y} = 1 - X$$

$$-\lambda Y = \ln|1-X|$$

$$Y = -\frac{\ln|1-X|}{\lambda}$$