Föreläsning 3

Kap 3

En stokastisk variabel har alltid ett tal som utfall

En stokastisk variabel betecknas med stor bokstav t.ex X
Ett utfall med liten bokstav t.ex x.

En stokastisk variabel är diskret om den kan anta ett ändligt eller ett uppräkneligt oändligt antal värden

I det diskreta fallet har vi

Def sannolikhetsfunktionen $p_X(x) = P(X=x) =$

$=$ Slh att X antar värdet x

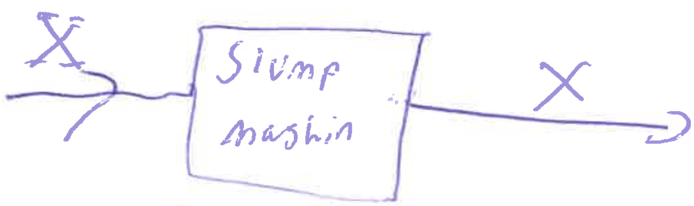
När sannolikhetsfunktionen för X söks skall den anges för alla x som X kan anta
(jfr vanliga funktioner)

$$\sum_{\substack{\text{alla}\\\text{utfall}\\x}} p_X(x) = 1$$

$p_X(x)$ ritas upp m.h.a stolpdiagram

Man fixerar först x och räknar sedan ut $P(X=x)$

Innan jag kastat tärningen kan den X prickar
När jag kastat tärningen har den x prickar



(Viktigt om $<$ eller $\leq$
missa inte en stolpe.)

ex1 kasta en tärning

$1 \Rightarrow 1\text{kr}$

$2,3 \Rightarrow 2\text{kr}$

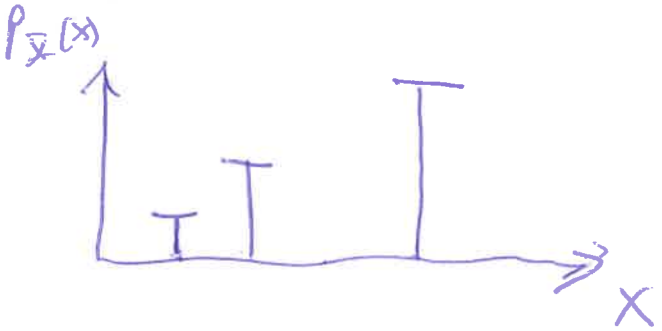
$4,5,6 \Rightarrow 4\text{kr}$

X = vinsten

$\Omega = \{1,2,4\}$

$X = x : x \in \{1,2,4\}$

$p_X(1) = \frac{1}{6} \quad p_X(2) = \frac{2}{6} \quad p_X(4) = \frac{3}{6}$



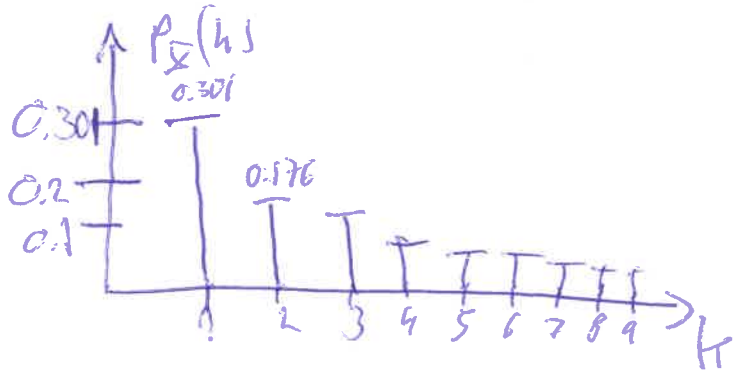
ex2

Benfords lag beskriver fördelningen av första siffran hos många datamängder

befolkningstal för städer, tal i årsredovisningar etc

$k = 1, 2, \ldots, 9$

$$p_X(k) = {}^{10}\log \frac{k+1}{k} = {}^{10}\log(k+1) - {}^{10}\log(k)$$



Def Fördelningsfunktionen för $X = F_X(x) = P(X \le x)$

$$= \sum_{\substack{\text{alla} \\ \text{utfall} \le x}} p_X(x) \quad \text{i det diskreta fallet}$$

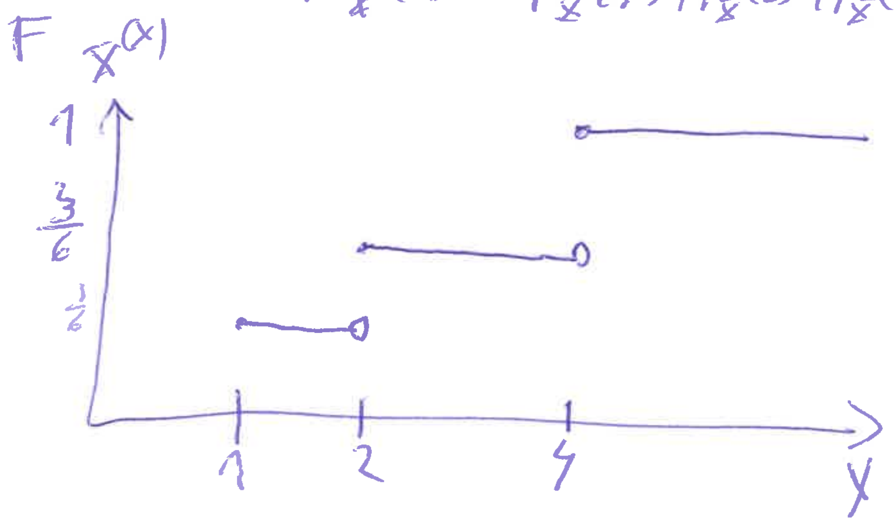
ex 1

$F_X(0) = 0$

$F_X(1) = \frac{1}{6}$

$F_X(2) = p_X(1) + p_X(2) = \frac{3}{6}$

$F_X(4) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 1$



alltid $F_X(x)$ avtar aldrig

$F_X(-\infty) = 0 \qquad F_X(\infty) = 1$

Diskret

En punkts fördelning
Två punkts fördelning   spec ~~Bernoulli~~ Bernoulli } se sid 51
Likformig fördelning $p_X(k) = \frac{1}{n}$ ex. tärning

Härled ffg-fördelningen

Antag att X är första gången vi lyckas

~~$P(X=k)$~~   och att vi varje gång har slh p att lyckas
oberoende av vad som händer andra gånger

$P(A_i) = P($vi lyckas i försök i

$p_X(1) = P(A_1) = p$

$\vdots$

$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k = 1, 2 \ldots$

Geom fördelning   Här är X antal misslyckade försök
från till innan vi lyckas

$p_X(k) = (1-p)^k \cdot p \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$

Bin-fördeln

Antag att händelsen A inträffar med samma sln p i varje försök. Vi upprepar försöket n ggr

$\boxed{\text{Se sid 167}}$

X = antalet ggr A inträffar $\Rightarrow X \in Bin(n, p)$

ex Vi drar 7 ggr utan återläggning

$P(X=3)$?

ex Yatzy

Vi har 5 tärningar vad är sannolikheten för 2 sexor

En variant är • ∘ • • ∘ ∘ ∘

$p\,(1-p)\,p\,p\,(1-p)(1-p)(1-p)$

Antal sätt att placera in de tre fyllda på 3 platser är $\binom{7}{3}$ jfr föreläsning 2

$\Rightarrow P(X=3) = \binom{7}{3} p^3 (1-p)^4$

Allm. $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\boxed{\text{se sid 7.06}}$ $\boxed{\text{och 53}}$

Vad blir väntevärdet? $X = I_1 + \dots + I_n$

där $P(I_i = 1) = p$ $P(I_i = 0) = 1-p$

$E(I_1) = \sum k \cdot p_X(k) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$\Rightarrow E(X) = n \cdot p$ se sid 169

$V(I_1) = E(I_1^2) - E^2(I_1) =$

$= \sum k^2 \cdot p_X(k) - p^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - p^2 =$

$= p(1-p)$

$\Rightarrow V(X) = n\,p(1-p)$ se sid 169

OBS! om $X \in Bin(n_1, p_1)$ $Y \in Bin(n_2, p_2)$

$X + Y \in Bin(n_1 + n_2, p)$ endast om $p_1 = p_2$

$\boxed{\text{Räkna 7.1}}$

$(5\tfrac{1}{2})$

$$P_X(h) \overset{\text{jfr}}{=} \frac{\binom{V}{h}\binom{S}{n-h}}{\binom{V+S}{n}} =$$

$$= \left[V+S = N \qquad p = \frac{V}{V+S} \right] =$$

$$= \frac{\binom{V+S \cdot \frac{V}{V+S}}{k}\binom{V+S-V}{n-h}}{\binom{V+S}{n}} =$$

$$= \frac{\binom{Np}{h}\binom{V+S\left(1-\frac{V}{V+S}\right)}{n-h}}{\binom{N}{n}} =$$

$$= \frac{\binom{Np}{h}\binom{N(1-p)}{n-h}}{\binom{N}{n}}$$

Hypergeometrisk fördeln

Vi gör dragning utan återläggning utan hänsyn till ordning av n enheter från N enheter och där relativa frekvensen av A-enheter är p från början blir X = antal A-enheter vi ~~får~~ $HyP(N,n,p)$

jfr sid 24 i teoridelen

"Bevis" se ~~uppg~~ 2.21

Se sid 176 och sid 54

$$p_X(k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$E(X) = np$

$V(X) = np(1-p)\cdot\frac{N-n}{N-1}$

Börja med sid 54

$$p_X(k) = \frac{\binom{V}{k}\binom{S}{n-k}}{\binom{V+S}{n}}$$

~~Räkna 7.X + X~~

Po-fördelningen

~~Räkna 7.20~~

Räkna om 2.15

Antag att vi har samma sannolikhet i varje tidpunkt att en viss händelse inträffar oberoende av om den inträffat tidigare eller ej och att den inträffar med intensitet λ

(dimension $\frac{\text{antal händelser}}{\text{tidsenhet}}$)

X = antal ggr den inträffar på $[0,t]$

$X \in Po(\lambda t) = Po(\mu)$

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

~~räkna 3.9~~

$E(X) = \mu \qquad V(X) = \mu$

~~Räkna ex 7.7~~

Sats 7.9 på sid 153

Räkna ex 7.7

Sid 153

$\sum$ över Po-fördelningar är Po-fördelad

Vi ska visa att

sid 7

$$\cancel{p_X(h) = \frac{\mu^h}{h!} e^{\mu}}$$

$$p_X(h) = \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} \to \frac{\mu^h}{h!} e^{-\mu}$$

när $n \to \infty$ och $p \to 0$

μ är antalet händelser på $[0, T]$ i genomsnitt

Vi delar upp intervallet i n st delintervall som är så små att högst 1 händelse inträffar på varje delintervall och detta med slh p $\Rightarrow \mu = np$ d.v.s n mycket stort

$$\binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} = \frac{n!}{h!\,(n-h)!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^h \frac{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} =$$

$$= \frac{\mu^k}{h!} \, \frac{n!}{(n-h)!} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}$$

$$= [n >> k] = \frac{\mu^h}{h!} \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-h+1)}^{n \text{ faktorer}}}{n^k}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}_{\to e^{-\mu}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-h}}_{\to 1} =$$

$$= \frac{\mu^h}{h!} e^{-\mu}$$