KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 20/8 2003, kl 14.00–19.00.
5B1306 Inledande Finansiell Matematik
Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma i uppgifterna.

1. Du skall bestämma priset på en Europeisk köpoption på en underliggande aktie med Blacks modell. Aktien kostar idag 60 kronor, och den ger om sex månader utdelning på 3% av det *då* gällande priset (dvs. priset omedelbart före utdelningen.) Aktien (eller snarare futurespriset på densamma,) antas ha en volatilitet på 30% under ett år, och optionens inlösentid är om nio månader med inlösenpriset 55 kr. Räntan är 3% per år med kontinuerlig förräntning.

   En användbar formel finns i slutet av tentan, och en tabell över normalfördelningen bifogas. (12p.)

2. Betrakta ett kontrakt som ger innehavaren $e^{r\tau}$ kronor om $t + \tau$ år, där r är räntan (per år) som gäller om t år med löptiden τ (dvs. från t till $t + \tau$ år.) Räntan räknas per år med kontinuerlig förräntning.

   Räntan r är stokastisk idag, dvs. vi vet inte vad r kommer att vara om t år. *Bevisa* att kontraktet ovan är värt precis Z_t, dvs. lika mycket som en nollkupong med inlösen 1 vid tiden t.

   Beviset skall bygga på principen om arbitragefrihet. Du får alltså inte utgå ifrån något annat än antagandet att det inte finns arbitrage. (5p.)

3. Betrakta följande ränteswap: innehavare A betalar till B i slutet av månad 6, 12, och 18 räntan på ett belopp av av 100 000 kronor enligt den (idag okända) halvårsränta som gällt under det senaste halvåret fram till utbetalningen, samt i slutet av månad 24, 30 och 36 motsvarande ränta, men på beloppet 150 000 kronor. (Beloppen är ”notational principals”, dvs. de är tänkta belopp man använder i kalkylen.)

   Innehavare B betalar å sin sida det konstanta beloppet c till A i slutet av månaderna $6, 12, 18, 24, 30, 36$.

   Bestäm c så att kontraktets värde vid tecknandet är noll för bägge parter. Nuvarande räntor (med kontinuerlig förräntning) är:

löptid, månader	6	12	18	24	30	36
ränta, % per år	5.0	5.25	5.5	6.0	6.2	6.3

   (Det är naturligtvis tillåtet att använda resultatet i uppgift 2, även om den uppgiften inte är löst.) (5p.)

Forts...

4. Du skall bestämma priset på en Amerikansk säljoption. Chefen har bestämt att utgångspunkten skall vara ett binomialträd över terminspriserna (”forward-”) på den underliggande tillgången (med inlösentid samtidigt med optionen), konstruerat så att priset i varje nod antingen multipliceras med $u = (1+\sigma\sqrt{\Delta t})$ eller med $d = (1 - \sigma\sqrt{\Delta t})$:

$$
\begin{array}{ccccc}
G_0 & G_0u & G_0u^2 & G_0u^3 & G_0u^4 \\
 & G_0d & G_0du & G_0du^2 & G_0du^3 \\
 & & G_0d^2 & G_0d^2u & G_0d^2u^2 \\
 & & & G_0d^3 & G_0d^3u \\
 & & & & G_0d^4
\end{array}
$$

där G_0 är dagens terminspris. Räntan antas vara känd och konstant $= r$. Tidssteget i trädet är givetvis Δt.

a. Bestäm riskjusterade (under ”forwardmåttet”) sannolikheten q för u [och därmed sannolikheten $(1 - q)$ för d] i detta träd. (6p.)

Vi skriver nu upp detta träd för $\sigma = 0.3$ och $\Delta t =$ två veckor. Terminspriset idag, G_0, är 100, och terminspriserna blir

100.00	105.88	112.11	118.71	125.69
	94.12	99.65	105.52	111.73
		88.58	93.79	99.31
			83.37	88.27
				78.46

b. Optionens inlösentid är om åtta veckor, och den underliggande tillgången är en aktie som inte ger utdelning under tiden. Skriv upp motsvarande* binomialträd för aktiens spotpris, och använd detta för att bestämma priset på den Amerikanska säljoptionen då inlösenpriset är 100 och räntan är 6% per år med kontinuerlig förräntning (räkna med 52 veckor på ett år.) (6p.)

(* Dvs. motsvarande noder i de två träden skall representera samma utfall.)

5. En portfölj består av dels en kupong-obligation med inlösen 100 000 kronor om två år med kupongutdelning 3 000 kronor varje halvår; dels en lång position på ett futureskontrakt med inlösen om två år på en 5-årig (idag) nollkupong med inlösenvärdet 50 000 kronor. Beräkna portföljens duration. Räntan är för närvarande platt 5% per år med kontinuerlig förräntning. (10p.)

Följande formel kan vara användbar: om $X = ae^{\sigma z}$ där $z \in N(0,1)$ och a, σ, K är konstanter, så gäller

$$
\mathrm{E}[\max(X - K, 0)] = \mathrm{E}[X]\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \quad \text{där}
$$
$$
d_1 = \frac{\ln(\mathrm{E}[X]/K) + \sigma^2/2}{\sigma}, \quad d_2 = d_1 - \sigma
$$

Här är Φ standard normalfördelningen; se bifogad tabell.

KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 20/8 2003, kl 14.00–19.00.
5B1306 Inledande Finansiell Matematik
Kortfattade lösningar / svar.

1. Terminspriset på underliggande aktien med inlösentid om nio månader är 59.5243 kr. Optionspriset blir då 8.26 kr.

2. Betrakta strategin: Köp idag en nollkupong med inlösentiden t. Man får då 1 krona vid tiden t. Köp då för denna krona nollkupongare med inlösentid $t+\tau$. Vi får då vid denna tid just $e^{r\tau}$ kronor. Eftersom denna strategi kostar Z_t kronor, och ger precis det önskade penningflödet, måste alltså, om inget arbitrage finns, det aktuella kontraktet vara värt $\underline{Z_t \text{ kronor}}$. Quad Erat Demonstrandum.

3. Om vi använder resultatet i uppgift 2 har vi att nuvärdet av A:s betalningar är

$$\begin{aligned}&100\,000\cdot[(Z_0-Z_6)+(Z_6-Z_{12})+(Z_12-Z_{18})]\\&+150\,000\cdot[(Z_{18}-Z_{24})+(Z_24-Z_{30})+(Z_30-Z_{36})]\\&=100\,000\cdot(1-Z_{18})+150\,000\cdot(Z_{18}-Z_{36})=21.872,60\end{aligned}$$

B:s betalningar har nuvärdet

$$c\cdot(Z_6+Z_{12}+Z_{18}+Z_{14}+Z_{30}+Z_{36})=5.4161c$$

Vi får att $\underline{c=4.038,44}$.

4.a Under forwardmåttet är terminspriserna en martingal, dvs i varje steg gäller $G_t=\mathrm{E[G_{t+1}]}$, dvs. $G_t=qG_tu+(1-q)G_td=qG_t(1+\sigma\sqrt{\Delta t})+G_t(1-q)(1-\sigma\sqrt{\Delta t})$ som ger $1=2q\sigma+1-\sigma$ som ger $\underline{q=0.5}$.

4b Trädet över spotpriserna blir

99.08	105.15	111.59	118.44	125.69
	93.47	99.19	105.28	111.73
		88.17	93.57	99.31
			83.18	88.27
				78.46

Trädet för optionspriserna blir (understruket=inlösen i förtid):

4.67	1.77	0.17	0.00	0.00
	7.59	3.38	0.34	0.00
		<u>11.83</u>	<u>6.43</u>	0.69
			<u>16.82</u>	11.73
				21.54

Optionspriset är alltså <u>4.67</u> (gör räkningarna med åtminstone en decimal till i noggrannhet.)

5. Kupong-obligationens duration är 1.9152 år och dess nuvärde $101,761.10$ kronor. Futurespriset på nollkupongaren är $43,035.40$ kronor, och nollkupongarens duration vid inlösen för futuren är givetvis tre år. Portföljens duration blir

$$1.9152 + \frac{43,035.40}{101,761.10} \times 3 \text{ år} = \underline{3.18 \text{ år}}$$