KTH Matematik	Tentamensskrivning, 13/1-2006, kl 8.00–13.00.
Harald Lang	5B1306 Finansiell Matematik gk.
	Hjälpmedel: miniräknare

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Observera att redundant information kan förekomma i uppgifterna.

---

1. Vi vill bestämma priset i kronor på en europeisk köpoption på 10 000 euro med inlösen om nio månader. Eurons volatilitet gentemot kronan anses vara 6% under ett år, och en euro kostar idag 9,40 kronor. En nio månaders nollkupong med inlösenvärde 100 kr kostar idag 98,00 kr, och en nio månaders nollkupong med inlösenvärde 100 euro kostar idag 97,60 euro.

   Vi skall använda Blacks modell, och då behöver vi värdena på
   - G (forward-priset på 10 000 euro)
   - t (tiden till inlösen)
   - σ (volatiliteten)
   - Z_t (diskonteringsfaktorn, som skrivs som e^{-rt} i Hull)

   Bestäm värdena på dessa fyra storheter. (10p.)

2. Vi har följande binomialträd enligt Ho-Lees modell över räntan i % per tidssteg:

period	0	1	2	3
	3,0	3,3	3,5	3,8
		2,9	3,1	3,4
			2,7	3,0
				2,6

   Räntan från period 0 till period 1 är alltså 3,0%, osv. Ett värdepapper blir i period 3 värt 1 600, 1 400, 1 000 eller 920 kronor, beroende på om räntan då är 3,8, 3,4, 3,0, eller 2,6%.

   a) Bestäm dagens futures-pris på värdepapperet (två decimaler). (5p.)

   b) Bestäm dagens forward-pris på värdepapperet (två decimaler). (5p.)

3. För en värdepappersportfölj är betalströmmen sådan att nuvärdet=80 000 kr, yielden = 5,5%, durationen = 1,5 år.

   Tre månader senare är yielden 5,0%. Bestäm portföljens värde då (approximativt). Inga utbetalningar sker under dessa tre månader. (5p.)

4. En aktie vars kurs idag är 80 kr ger utdelningen 5% av aktiens (dåvarande) kurs om ett år och om två år. Bestäm aktiens forward-pris med inlösen om 2,5 år. Ettårsräntan är 4%, tvåårsräntan 4,5% och 30-månadersräntan 4,8%. (5p.)

5. En obligation ger betalströmmen 5 000 kronor om två år, 5 000 kronor om fyra år och 100 000 kronor om fem år. Vi vill beräkna priset p på en europeisk option på denna obligation med inlösen om ett år genom att använda Blacks formel:

$$p = Z_t \mathrm{E}[F(Ge^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\sqrt{t}\, w})], \quad w \in N(0,1).$$

(Här är $F(X)$ optionens inlösenvärde då den underliggande obligationens värde är X.) Bestäm de värden på Z_t, G, σ och t som skall användas i denna formel. Vi antar att räntan (kontinuerlig) är 5% för alla löptider och att standardavvikelsen för yieldens förändring under ett år är 0,75% ("procentenheter"). (10p.)

6. Antag att vi skall bestämma priset på en amerikansk option på en aktie. För det behöver vi ett binomialträd över aktiens spotpriser. Aktien ger utdelning 10 kronor om $\frac{1}{2}$ månad, och lika mycket om $2\frac{1}{2}$ månad (egendomligt nog!) Gör ett binomialträd över aktiens spotpris med tidssteget en månad för tre månader framåt. Aktien kostar idag 500 kronor och räntan är 12% per år (kontinuerligt). Volatiliteten antas vara 40% på ett år. Om (de riskjusterade) sannolikheterna för "upp" och "ner" i ditt binomialträd är något annat än 0.5 skall du ange (med motivering) vad de är. (10p.)

7. Låt $e^{R(t)}$ vara den behållning man har på ett "money market account" efter t år om man sätter in beloppet 1 idag. Låt X vara ett värde som realiseras om t år (det kan t.ex. vara priset på en råvara eller ett värdepapper vid den tiden). Om marknaden anser att $e^{R(t)}$ och X är negativt korrelerade så kommer forwardpriserna att uppfylla

$$G^{(t)}[e^{R(t)}X] < G^{(t)}[e^{R(t)}]\, G^{(t)}[X]$$

Visa att detta medför att futurespriset på X är lägre än forwardpriset: $F_0^{(t)}[X] < G^{(t)}[X]$. (Du skall alltså göra en matematisk härledning av denna olikhet, utgående från bevisade satser i kursen.) (10p.)