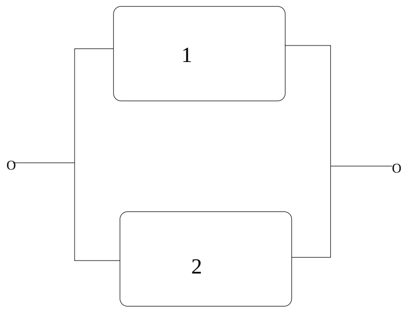
Om IFRA-fördelningar

Jan Enger
Matematisk statistik
KTH

Med en IFR (Increasing Failure Rate) menas som bekant en fördelning vars felintensitet är icke-avtagande.

Exempel.



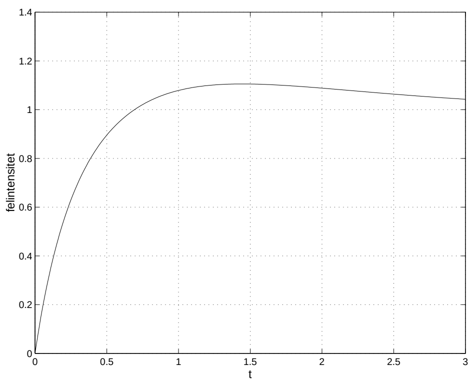
Antag att komponenterna ovan fungerar oberoende av varandra och har konstanta felintensiteter $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$. Komponenterna är således IFR.
Systemets överlevnadsfunktion är

$$R(t) = 1 - (1 - e^{-t})(1 - e^{-2t}) = e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}$$

och dess felintensitet är

$$\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)} = \frac{e^{-t} + 2e^{-2t} - 3e^{-3t}}{e^{-t} + e^{-2t} - e^{-3t}} = \frac{e^{2t} + 2e^{t} - 3}{e^{2t} + e^{t} - 1}$$

Sätt $x = e^t,\ 1 \leq x$ och betrakta $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 1}$. Derivatan av f är $f'(x) = \frac{1-4x-x^2}{(x^2+x-1)^2}$ vilken har nollställe för $x = 2 + \sqrt{5}$. Man inser att f är växande för $1 \leq x \leq 2 + \sqrt{5}$ och därefter avtagande. Härav fås att $\lambda(t)$ är växande för $0 \leq t \leq \ln(2 + \sqrt{5}) \approx 1.44$ och därefter avtagande, speciellt gäller att systemet ej är IFR. Figuren visar felintensiteten för systemet.



Det gäller dock att ett system av IFR-komponenter är nästan IFR, vilket vi skall precisera närmare.

Definition 1 *En livslängdsfördelning med felintensitet $\lambda(t)$ är IFRA (Increasing Failure Rate in Average) om*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \lambda(u)du$$

är växande i t.

Sats 1 *IFR $\Rightarrow$ IFRA.*

Bevis. Antag att $\lambda(t)$ är växande och att $t_1 \leq t_2$. Då fås

$$\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} \lambda(u)du = [v = \frac{t_1}{t_2}u] = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} \lambda(\frac{t_2}{t_1}v)dv =$$
$$(\frac{t_2}{t_1}v \geq v \text{ och } \lambda(t) \text{ växande}) \geq \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} \lambda(v)dv \quad (1)$$

vilket innebär att $\frac{1}{t}\lambda(t)$ är växande i t, d.v.s. $\lambda(t)$ är IFRA. $\square$

Sats 2 *$R(t)$ är överlevnadsfunktionen till en IFRA-fördelning om och endast om $R^{1/t}(t)$ är avtagande i t.*

Bevis. $R(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(u)du\}$ där $\lambda(t)$ är felintensiteten. Alltså gäller
$R^{1/t}(t)$ avtagande $\Leftrightarrow \ln R^{1/t}(t)$ avtagande $\Leftrightarrow \frac{1}{t}\ln R(t)$ avtagande $\Leftrightarrow -\frac{1}{t}\int_0^t \lambda(u)du$ avtagande $\Leftrightarrow \frac{1}{t}\int_0^t \lambda(u)du$ växande $\Leftrightarrow R(t)$ IFRA.

Sats 3 *$R(t)$ är överlevnadsfunktionen till en IFRA-fördelning om och endast om för alla $\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 1$, och $t \geq 0$ det gäller att $R(\alpha t) \geq R^\alpha(t)$.*

Bevis. För $0 \leq u \leq t$ sätt $\alpha = u/t$, dvs $u = \alpha t$. Då är $0 \leq \alpha \leq 1$ och således
$R(t)$ IFRA $\Leftrightarrow R^{1/t}(t)$ avtagande $\Leftrightarrow R^{1/u}(u) \geq R^{1/t}(t)$ alla $0 \leq u \leq t \Leftrightarrow R(u) \geq R^{u/t}(t)$ alla $0 \leq u \leq t \Leftrightarrow R(\alpha t) \geq R^\alpha(t)$ alla $0 \leq \alpha \leq 1$ och $t \geq 0$. $\square$

Vi skall nu visa att koherenta system av oberoende IFRA-komponenter är IFRA-system. Det betyder speciellt att om komponenternas livslängdsfördelningar har icke-avtagande felintensiteter (IFR) så är systemet IFRA. Överlevnadsfunktionen i exemplet ovan alltså ett exempel på IFRA- men ej IFR-överlevnadsfunktion.
Vi skall t o m visa denna egenskap hos något mer generellare system, nämligen för s k monotona system.

Definition 2 *Låt $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vara strukturfunktionen till ett system. Systemet sägs vara monotont om Φ är icke-avtagande i $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Skillnaden mellan monotona system och koherenta system är att i monotona system behöver komponenterna ej vara relevanta. Vi behöver två hjälpsatser.

Hjälpsats 1 *Låt $0 \leq \alpha \leq 1$ och antag att $u \geq v$ och $z \geq v$ och $v \geq 0$. Då gäller att*

$$z^\alpha + u^\alpha - v^\alpha \geq (z+u-v)^\alpha \tag{2}$$

Bevis. Betrakta z och u som fixa. Man kan anta att $z \geq u$.
Sätt $g(v) = z^\alpha + u^\alpha - v^\alpha - (z+u-v)^\alpha$. Sätter man $v = u$ erhålls $g(u) = 0$. Derivatan av $g(v)$ blir $g'(v) = -\alpha v^{\alpha-1} + \alpha(z+u-v)^{\alpha-1} = -\alpha(\frac{1}{v^{1-\alpha}} - \frac{1}{(z+u-v)^{1-\alpha}}) \leq 0$ eftersom $z+u-v \geq z \geq v$ och $1-\alpha \geq 0$. Derivatan är således negativ, funktionen $g(v)$ avtar och eftersom $g(u) = 0$ är $g(v) \geq 0$ för $v \leq u$. Men härav fås omedelbart (2). □

Hjälpsats 2 *Låt $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vara strukturfunktionen i grundform till ett monotont system av oberoende komponenter vars funktionssannolikheter är $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Då gäller att*

$$\Phi(p_1^\alpha, p_2^\alpha, \ldots, p_n^\alpha) \geq \Phi^\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_n) \tag{3}$$

Bevis. Notera att $\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ är systemets funktionssannolikhet.
Vi utför ett induktionsbevis över n. Antag således först att $n = 1$. Då är antingen $\Phi(x_1) \equiv 1$ eller $\Phi(x_1) = x_1$ eller $\Phi(x_1) \equiv 0$ och (3) gäller uppenbart. Antag nu att (3) gäller för $n = k$ och visa att (3) i så fall gäller för $n = k+1$.

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) &= (\text{pivotering kring komponent } k+1) \\ &= x_{k+1}\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1) + (1 - x_{k+1})\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0) \end{aligned} \tag{4}$$

där $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1)$ och $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0)$ är strukturfunktioner till monotona system av k komponenter, den $k+1$:a komponenten ersatt med säker förbindelse respektive brott. Sannolikheten att systemet fungerar om komponentsannolikheterna är $p_1^\alpha, p_2^\alpha, \ldots, p_n^\alpha$ fås genom att sätta in dessa sannolikheter i strukturfunktionen och därvid erhålls

$$\begin{aligned} &\Phi(p_1^\alpha, p_2^\alpha, \ldots, p_{k+1}^\alpha) = (\text{ från (4)}) = p_{k+1}^\alpha\Phi(p_1^\alpha, p_2^\alpha, \ldots, p_k^\alpha, 1) + (1-p_{k+1}^\alpha)\Phi(p_1^\alpha, p_2^\alpha, \ldots, p_k^\alpha, 0) \geq \\ &(\text{enligt induktionsantagandet}) \geq p_{k+1}^\alpha\Phi^\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1) + (1 - p_{k+1}^\alpha)\Phi^\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_k, 0) \end{aligned} \tag{5}$$

I hjälpsats 1 sätter vi nu
$z = p_{k+1}\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1)$, $u = \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_k, 0)$ och $v = p_{k+1}\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_k, 0)$.
Villkoren i hjälpsats 1 är då uppfyllda och vi får

$$\begin{aligned} (5) \geq \left[p_{k+1}\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_k, 1) + (1 - p_{k+1})\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_k, 0)\right]^\alpha &= (\text{pivotering}) = \\ \Phi^\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}) \end{aligned} \tag{6}$$

Olikheten (3) gäller alltså för $n = k+1$ och således för alla n. □

Vi kan nu formulera

Sats 4 *Antag att komponenterna i ett monotont system fungerar oberoende av varandra och att deras livslängder är IFRA. Då är systemet IFRA.*

Bevis. Låt $R_1(t), R(_2(t), \ldots, R_n(t)$ vara komponenternas överlevnadsfunktioner och $\Phi(x_1, .x_2, \ldots, x_n)$ systemets strukturfunktion i grundform och $R(t)$ systemets överlevnadsfunktion. För $0 \leq \alpha \leq 1$ erhålls

$$\begin{aligned} R(\alpha t) = \Phi(R_1(\alpha t), R_2(\alpha t), \ldots, R_n(\alpha t)) &\geq (\text{enligt sats 3 och } \Phi \text{ monoton}) \geq \\ \Phi(R_1^\alpha(t), R_2^\alpha(t), \ldots, R_n^\alpha(t)) &\geq (\text{enligt hjälpsats 2}) \geq \\ \Phi^\alpha(R_1(t), R_2(t), \ldots, R_n(t)) &= R^\alpha(t) \end{aligned} \tag{7}$$

Enligt sats 3 är $R(t)$ således IFRA. □