TTT-transform och optimalt underhåll

Jan Enger
Matematisk statistik
KTH

En komponent som har en felintensitet $\lambda(t)$ måste vara i kontinuerligt bruk och byts ut så snart den går sönder mot en ny likadan komponent. Kostnaden för ett sådant utbyte är c_1 kronor. För att få en lägre kostnad kan komponenten bytas ut innan den brustit och utbyteskostnaden blir i så fall c_2 kronor där $c_2 < c_1$.
Utbytesstrategi är därför att byta ut en komponent som fungerat under b tidsenheter eller som brustit innan dess. Problemet är att beräkna hur stor b skall vara.

Låt $N_1(t)$ vara antalet byten av brustna komponenter fram till tiden t och låt $N_2(t)$ vara antalet byten av komponenter som fungerat under b tidsenheter. Kostnaden för dessa utbyten fram till tiden t blir då

$$K(t) = c_1 N_1(t) + c_2 N_2(t) \tag{1}$$

och kostnaden per tidsenhet,

$$K(t)/t = c_1 N_1(t)/t + c_2 N_2(t)/t \tag{2}$$

Lägg märke till att $N_1(t)$ och $N_2(t)$ är stokastiska variabler.

Tidslängden b skall beräknas så att $\lim\limits_{t\to\infty} K(t)/t$ blir så liten som möjligt, dvs kostnaden per tidsenhet blir så liten som möjligt i det långa loppet. Först skall gränsvärdet beräknas.

Om T är komponentens livslängd och Y tiden fram till byte inses att

$$Y = \min(T, b) \tag{3}$$

Låt som vanligt $R(t)$ och $F(t) = 1-R(t)$ beteckna överlevnadsfunktion repektive fördelningsfunktionen för livslängden av komponenten.
Sannolikheten att byte sker på grund av att komponenten brustit är $P(T \le b) = F(b)$ och sannolikheten att den byts ut, därför att den fungerat under b tidsenheter, är $P(T > b) = R(b)$.
Väntevärdet av Y beräknas enligt

$$E(Y) = \int_0^\infty R_Y(t)dt = \int_0^b P(Y > t)dt + \int_b^\infty P(Y > t)dt = \\ \int_0^b P(T > t)dt + \int_b^\infty 0\, dt = \int_0^b R_T(t)dt = \int_0^b R(t)dt \tag{4}$$

Härnäst beräknas kostnaden efter n stycken byten. Låt N_1 och N_2 beteckna antalet byten på grund av komponentfel respektive funktion under b tidsenheter. Då gäller (varför?) att

$$N_1 \in \mathrm{Bin}(n, F(b)) \text{ och } N_2 \in \mathrm{Bin}(n, R(b))$$

Enligt stora talens lag gäller dessutom att

$$N_1/n \to F(b) \text{ och } N_2/n \to R(b) \tag{5}$$

med sannolikhet 1 då $n \to \infty$.
Låt Y_j vara tiden som komponent nr j är i funktion innan byte sker, $j = 1, 2, \ldots$. Dessa stokastiska variabler är oberoende med samma fördelning som Y. Det n:te bytet sker alltså vid tidpunkten $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ och kostnaden upp till detta byte är $K_n = c_1 N_1 + c_2 N_2$. Det gäller nu att $\lim_{t\to\infty} K(t)/t = \lim_{n\to\infty} K_n / \sum_{j=1}^{n} Y_j$. Därav fås

$$\lim_{t\to\infty} \frac{K(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{\sum_{j=1}^{n} Y_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 N_1 + c_2 N_2}{\sum_{j=1}^{n} Y_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 N_1/n + c_2 N_2/n}{\sum_{j=1}^{n} Y_j/n} =$$

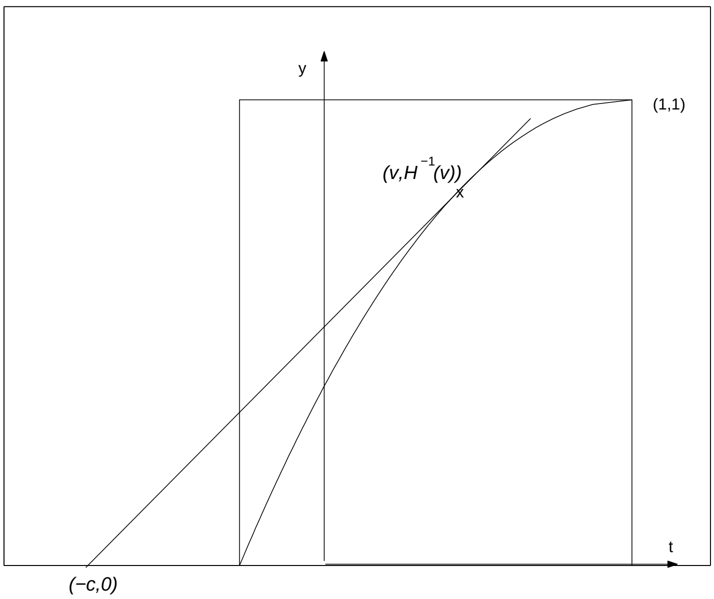
$$\text{(enligt (5) och stora talens lag)} = \frac{c_1 F(b) + c_2 R(b)}{E(Y)} = \frac{(c_1 - c_2)F(b) + c_2}{E(Y)} =$$

$$(c_1 - c_2)\frac{F(b) + c_2/(c_1 - c_2)}{E(Y)} = (c_1 - c_2)\frac{F(b) + c}{\int_0^b R(t)dt} \qquad (6)$$

där $c = c_2/(c_1 - c_2) > 0$.
Tydligen skall b väljas så att $\dfrac{F(b) + c}{\int_0^b R(t)dt}$ minimeras, vilket är detsamma som att

$$\frac{\int_0^b R(t)dt}{F(b) + c} = \frac{H^{-1}(v)}{v + c} \qquad (7)$$

maximeras, där H^{-1} är TTT-transformen till T och $v = F(b)$. Notera nämligen att $H^{-1}(v) = \int_0^{F^{-1}(v)} (1 - F(t))dt = \int_0^{F^{-1}(v)} R(t)dt = \int_0^b R(t)dt$ per definition.



Man ser från figuren att $\dfrac{H^{-1}(v)}{v + c}$ är lutningskoefficienten för linjen mellan punkterna $(v, H^{-1}(v))$ och $(-c, 0)$. Denna lutning skall maximeras vilket man i figuren gör genom att fälla ner en linje genom $(-c, 0)$ tills den träffar TTT-transformen H^{-1}. Om H^{-1} är deriverbar i $0 \leq v \leq 1$ är linjen en tangent till H^{-1} genom $(-c, 0)$.

Den tidpunkt b vid vilken $F(b) = v$ är då den sökta utbytestiden.

Det kan mycket väl hända att $v = 1$, dvs den största lutningen fås av linjen mellan punkterna $(-c, 0)$ och $(1, 1)$. Detta gäller exempelvis om fördelningen har avtagande felintensitet eftersom H^{-1} då ligger under linjen $y = t$. I detta fall är $b = \infty$, dvs inget utbyte skall ske innan komponenten brustit. Om felintenstiteten är avtagande är detta så gott som självklart, eftersom en ny komponent är sämre en en äldre fungerande komponent.

I konkreta fall är i allmänhet H^{-1} ej känd, och då får man skatta H^{-1} genom TTT-plotten istället. Vi illustrerar detta med ett exempel.

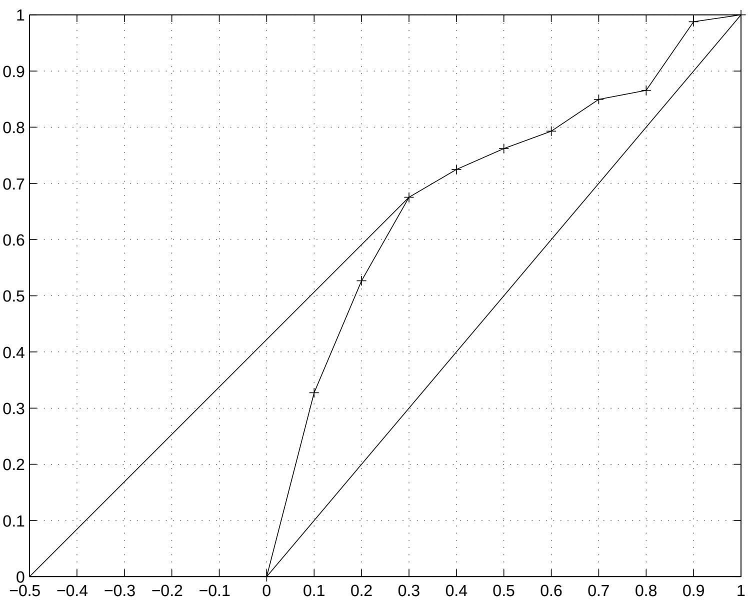
Exempel. Vid provning av tio komponenter brast komponenterna vid följande tidpunkter:

$$3.7 \quad 6.2 \quad 8.3 \quad 9.1 \quad 9.8 \quad 10.5 \quad 12.1 \quad 12.7 \quad 19.6 \quad 21.0.$$

Kostnaden för utbyte av en trasig komponent är 3000 kr medan kostnaden för byte av en hel komponent är 1000 kr. Uppskatta en lämplig tid för byte av hela komponenter.
TTT-plotten beräknas enkelt, varvid följande värden erhålls för TTT(i):

$$0.33 \quad 0.53 \quad 0.68 \quad 0.72 \quad 0.76 \quad 0.79 \quad 0.85 \quad 0.87 \quad 0.99 \quad 1.00.$$

c får värdet $1000/(3000 - 1000) = 0.5$.
Ritas TTT-plotten ut och en linje genom $(-0.5, 0)$ fälls ner till plotten erhålls följande figur. Vi ser att $v = 0.3$ och motsvarande tidpunkt är $b = \underline{8.3}$.



Det är lätt att inse att plotten alltid kommer att träffas i en ”hörnpunkt”. Det innebär att man numeriskt kan beräkna $\dfrac{\mathrm{TTT}(i)}{c + i/n}$ för $i = 1, 2, \ldots, n$, och b skattas med den tidpunkt vid vilken utrycket blir som störst. I exemplet får vi värdena

$$0.55 \quad 0.757 \quad 0.85 \quad 0.8 \quad 0.76 \quad 0.718 \quad 0.708 \quad 0.669 \quad 0.707 \text{ och } 0.667.$$

Det största värdet 0.85 fick vi vid tredje tidpunkten 8.3.