Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1922/SF1923/SF1924/SF1935, SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, TORSDAG 10 APRIL 2025 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Svara med minst fyra värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten.
För godkänt krävs att minst tre av fem uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

I en burk liger en gul kula, en grön kula, en blå kula, och en röd kula. Vi drar 4 gånger med återläggning. Efter varje dragning antecknar vi vilken färg det blev. Vad är sannolikheten att alla fyra färgerna blir antecknade?

Uppgift 2

För händelserna $A, B \subset \Omega$ gäller att $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ och $P(A^*|B) = \frac{7}{20}$. Bestäm $P(A|B^*)$.

Uppgift 3

En kontinuerlig s.v. (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{om} \quad x \in [0,1],\ y \in [0,1], \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Bestäm sannolikheten $P\Big(XY < \frac{1}{2}\Big)$.

Uppgift 4

En diskret s.v. X har sannolikhetsfunktionen $p_X(0) = 0.1$, $p_X(1) = 0.3$, $p_X(2) = 0.4$, $p_X(3) = 0.2$. Bestäm standardavvikelsen $D(X)$.

Uppgift 5

De stokastiska variablerna X och Y är sådana att $V(X) = 4$, $V(Y) = 1$ och korrelationskoefficienten $\rho(X, Y) = \frac{1}{4}$. Låt

$$\eta = aX + (1 - a)Y,$$

där $a > 0$ är en konstant. Bestäm a så att variansen $V(\eta)$ blir så liten som möjligt.

Lycka till!

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL KONTROLLSKRIVNING I SF1922/SF1923/SF1924/SF1935 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, TORSDAG 10 APRIL 2025 KL 08.00–10.00.

Uppgift 1

$$\frac{g}{m} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{32} \approx 0.09375$$

Uppgift 2

Eftersom $P(A^*|B) = \frac{7}{20}$ har vi

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) = 1 - P(A^*|B) = \frac{13}{20},$$

och därmed gäller att

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{\frac{13}{20}} = \frac{20}{13} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{13}$$

Vidare gäller att

$$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{4}{5} - \frac{4}{13} + \frac{1}{5} = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$$

Slutligen ger detta att

$$P(A|B^*) = \frac{P(A \cap B^*)}{P(B^*)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{9/13 - 1/5}{1 - 4/13} = \frac{45 - 13}{45} = \frac{32}{45} \approx 0.711$$

Uppgift 3

Låt $0 < z < 1$. Vi beräknar $P(XY < z)$. Om vi i xy-koordinatsystemet först ritar området $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, och sedan linjen $y = \frac{z}{x}$ i det området, så kommer vi inse att

$$P(XY < z) = P(Y < \frac{z}{X}) = \iint_{\{y < \frac{z}{x}\}} f_{X,Y}(x,y) dxdy = \iint_{\{y < \frac{z}{x}\} \cap [0,1]^2} 1 \ dxdy =$$

$$= \int_0^z dx \int_0^1 dy + \int_z^1 dx \int_0^{z/x} dy = z + \int_z^1 \frac{z}{x} \ dx = z + z \int_z^1 \frac{dx}{x} = z + z\Big[ln(x)\Big]_z^1 = z\big(1 - ln(z)\big).$$

När $z = 1/2$, får vi:

$$P(XY < 1/2) = 0.5\big(1 - ln(0.5)\big) = 0.8465736 \approx 0.8466$$

Uppgift 4

Notera att $D(X) = \sqrt{V(X)}$, där $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.
Vi har

$$E(X) = 1(0.3) + 2(0.4) + 3(0.2) = 1.7,$$

$$E(X^2) = 1^2(0.3) + (2^2)(0.4) + (3^2)(0.2) = 3.7$$

Då blir $D(X) = \sqrt{3.7 - 1.7^2} = \sqrt{0.81} = 0.9$

Uppgift 5

Vi har:

$$V(\eta) = a^2V(X) + (1-a)^2V(Y) + 2a(1-a)C(X,Y) = 4a^2 + (1-a)^2 + a(1-a),$$

ty $2C(X,Y) = 2\rho(X,Y)\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 1 = 1$.
Efter en förenkling:

$$V(\eta) = 4a^2 + (1-a)^2 + a(1-a) = 4a^2 - a + 1 = g(a).$$

För att få ett lokalt extremvärde av funktionen $g(a)$, löser vi följande ekvation: $g'(a) = 0$.
Vi har:

$$g'(a) = 8a - 1 = 0.$$

Lösningen till den blir $a = \frac{1}{8}$.
Vidare, eftersom funktionen $g(a)$ är en andragradsfunktion med en positiv koefficient framför a^2, så blir därför $\frac{1}{8}$ den punkten som minimerar funktionen $g(a)$. Dvs. variansen $V(\eta) = g(a)$ blir så liten som möjligt när $a = \frac{1}{8}$.