Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1914/SF1915/SF1916 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, TORSDAGEN DEN 18:e SEPTEMBER 2025 KL 13.00–15.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Kontrollskrivningen består av 5 uppgifter. Varje uppgift kan ge antingen 1 eller 0 poäng (korrekt svar ger 1 poäng, felaktigt svar ger 0 poäng). Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på svarsblanketten. För godkänt krävs minst 3 av maximalt 5 poäng.

Uppgift 1

I ett teknikföretag studeras två händelser: anställda som kan programmera i Python (A) och anställda som har arbetat med ett Data Science projekt (B). Från interna undersökningar finns följande information tillgänglig: i) Bland dem som arbetade med ett Data Science projekt kan 80% Python, ii) Bland de som kan Python har 40% arbetat med ett Data Science projekt. Dessutom är sannolikheten att en anställd har arbetat med ett Data Science projekt 20%. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald anställd antingen kan Python eller har arbetat med ett Data Science projekt, eller båda och?

Uppgift 2

Låt X vara en binomialfördelad s.v., $X \in Bin(n, p)$. Beräkna sannolikheten $P(X \geq 1)$, om $E(X) = 2$ och $D(X) = 1$.

Ledning. För $X \in Bin(n, p)$ gäller:
a) $p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
b) $E(X) = np$
c) $V(X) = np(1-p)$

Uppgift 3

Den tvådimensionella s.v. (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} axy, & \text{om } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna sannolikheten $P(X + Y \leq 1)$.

Ledning. Bestäm konstanten a först.

Var god vänd!

Uppgift 4

De två stokastiska variablerna X och Y har varianser $V(X) = 16$ och $V(Y) = 9$, respektive. Dessutom, vet vi att kovariansen $C(X, Y) = -6$.

Beräkna standardavvikelsen för $Z = 3X - 2Y + 5$.

Uppgift 5

Den stokastiska variabeln Y har den så kallade dubbelsidiga exponentiella fördelningen med parametern $\lambda > 0$, dvs Y har täthetsfunktionen

$$f_Y(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|}, \quad y \in \mathbb{R},$$

där $|\cdot|$ betecknar absolutbelopp.

Bestäm standardavvikelsen $D(Y)$ då $\lambda = 2$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Det är givet att: $P(A|B) = 0.8, \quad P(B|A) = 0.4, \quad P(B) = 0.2.$
Vi har för $P(A \cap B)$ mha $P(A|B)$:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16.$$

Dessutom kan vi beräkna $P(A)$ mha $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies 0.4 = \frac{0.16}{P(A)} \implies P(A) = 0.4.$$

Och därmed, det vi söker är:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 0.4 + 0.2 - 0.16 = 0.44$$

Dvs.,

$$P(A \cup B) = 0.44$$

Uppgift 2

Vi har för $X \in \text{Bin}(n, p)$:

$$E(X) = np = 2, \quad V(X) = np(1-p) = 1.$$

Därmed:

$$np(1-p) = 1 \implies 2(1-p) = 1 \implies 1 - p = 0.5 \implies p = 0.5.$$

Alltså, $n = \frac{E(X)}{p} = \frac{2}{0.5} = 4$. Dvs. $X \in \text{Bin}(4, 0.5)$.
Slutligen,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = 1 - (1-p)^n = 1 - 0.5^4 = 0.9375.$$

Uppgift 3

Vi har

$$\int_0^1 \int_0^1 axy\, dy\, dx = \int_0^1 ax \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{a}{2} x\, dx = \frac{a}{2}\frac{1}{2} = 1.$$

Därför, $a = 4$, och därmed,

$$P(X + Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xy\, dy\, dx = \int_0^1 4x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 2x(1-x)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 2x(1 - 2x + x^2) dx = \int_0^1 (2x - 4x^2 + 2x^3) dx = \left[x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \ = \ \frac{1}{6} \ \approx \ 0.1667$$

Uppgift 4

Konstanten påverkar inte variansen, dvs

$$V(Z) = V(3X - 2Y) = 3^2 V(X) + (-2)^2 V(Y) + 2 \cdot 3 \cdot (-2) C(X, Y).$$

Alltså, har vi:

$$V(Z) = 9 \cdot 16 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-6) = 144 + 36 + 72 = 252.$$

Därmed, standardavvikelsen för Z är

$$D(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{252} \approx 15.8745$$

Uppgift 5

Väntevärdet $E(Y) = 0$, enl symmetrin (runt $y = 0$) av fördelningen för Y.
Dvs, $V(Y) = E(Y^2)$. Vi har:

$$E(Y^2) = \int_{\mathbb{R}} y^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |y|} dy = \lambda \int_0^{\infty} y^2 e^{-\lambda y} dy = |\text{partiell integration 2 ggr}| = \frac{2}{\lambda^2}\,.$$

Alltså, $D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$, då $\lambda = 2$.