Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1914/SF1915/SF1916 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
TISDAG 21 OKTOBER 2025 KL 8.00–13.00.

Examinator SF1914/SF1915/SF1916: Mykola Shykula, 076-830 08 01

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II.
Del I består av uppgifterna 1–12 och varje korrekt svar ger 1 poäng. På denna del ska endast svar anges, i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen. Svaren ska anges på svarsblanketten (utdelas vid tentamen). Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1–3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter (i svarsblanketten anges då ordet ”Bonus”). Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen behöver ej besvara uppgift 12, utan får tillgodoräkna sig denna uppgift (i svarsblanketten anges då ordet ”Bonus”). Dessa tillgodoräknanden gäller för den här tentamen och vid omtentamen i december 2025. Gränsen för godkänt är 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 8 poäng.

Del II består av uppgifterna 13–16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på eller får komplettera del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del ska resonemang och uträkningar vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar ska förklaras och definieras samt numeriska svar ska anges med *minst tre* värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen får dessutom tre bonuspoäng på del II. Dessa bonuspoäng gäller för den här tentamen och vid omtentamen i december 2025.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

Utförsåkaren Sara kämpar om de ädlaste medaljerna i slalombacken. Sara vet att sannolikheten för en allvarlig skada är ca 0.01 per tävling. Under sin karriär förväntar hon sig att kunna delta i totalt 140 (oberoende av varandra) slalomtävlingar, dvs. om en skada inträffar ska hon rehabiliteras och fortsätta tävla. Vad är sannolikheten för att Sara kommer att skadas allvarligt *minst* en gång?

A: ca 0.755

B: ca 0.075

C: ca 0.007

D: ca 0.99

Uppgift 2

Låt X vara en stokastisk variabel med täthetsfunktionen $f_X(x)$. Låt $Y = 2\ln(X)$.
Bestäm täthetsfunktionen $f_Y(y)$ för Y.

A: $f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{2}e^y\right)$

B: $f_Y(y) = f_X\left(e^{y/2}\right)$

C: $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^y\, f_X\left(\frac{1}{2}e^y\right)$

D: $f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{y/2} f_X\left(e^{y/2}\right)$

Uppgift 3

Låt X och Y vara stokastiska variabler, sådana att $V(X) = 4$, $V(Y) = 9$, och korrelationskoefficienten $\rho(X, Y) = -\frac{1}{12}$.

Beräkna $V(3X - 2Y)$.

A: 75

B: 108

C: 66

D: 78

Uppgift 4

Låt X, Y och Z vara oberoende stokastiska variabler, sådana att $X \in Po(1.5)$, $Y \in Po(0.5)$ och $Z \in Po(0.8)$. Låt $N = X + Y + Z$.

Bestäm $P(N \geq 4)$.

A: 0.156

B: 0.848

C: 0.308

D: 0.629

Uppgift 5

En julgranbelysning består av 16 seriekopplade lampor. Belysningens brintid (enhet:år) är lika med brinntiden tills första lampan slocknar. Antag att lampornas brinntider är oberoende och exponentialfördelade var och en med väntevärdet 1. Låt Y vara belysningens brinntid.

Bestäm $P(Y \geq \frac{1}{4})$.

A: ca 0.78

B: ca 0.22

C: ca 0.02

D: ca 0.98

Uppgift 6

Som modell för att beskriva variationen av poäng på antagningsprovet till en viss utbidning kan man använda en normalfördelning med väntevärdet 100 och standardavvikelsen 15, dvs $N(100, 15)$. Vilken antagningsgräns ska man sätta om man vill att ungefär 20 % av de med högst poäng ska komma in?

A: 103

B: 113

C: 119

D: 124

Uppgift 7

Låt $x_1, \ldots, x_5$ vara fem oberoende observationer av $X_i \in \text{Po}(\mu)$, $i = 1, \ldots, 5$, där μ är en okänd parameter. ML-skattningen av μ ges då av

$$\mu^*_{\text{obs}} = \bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i$$

Bestäm medelfelet för μ^*, dvs bestäm $d(\mu^*)$, då $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 13$, $x_4 = 7$, $x_5 = 5$.

A: 2.65

B: $\sqrt{\frac{\mu}{5}}$

C: 1.4

D: 1.18

Uppgift 8

Emma undrar om utomhustemperaturen är annorlunda i Södertälje än på Liljeholmstorget. För att undersöka detta mäter hon temperaturen i Celsius under fem olika dagar i juli. Mätningarna under olika dagar är oberoende av varandra.

Tid	08:15, Dag 1	10:00, Dag 2	12:00, Dag 3	16:00, Dag 4	18:00, Dag 5
Södertälje	16.5	18.3	22.6	21.2	19.0
Liljeholmstorget	15.3	17.7	22.9	19.5	18.1

Beräkna ett 90 % konfidensintervall för den genomsnittliga temperaturskillnaden mellan Södertälje och Liljeholmstorget. Antag också att temperaturskillnaderna är normalfördelade.

A: (0.11, 1.53)

B: $(-0.11, 1.75)$

C: (0.00, 1.33)

D: $(-2.98, 4.62)$

Uppgift 9

Veckoutgifterna (i kr) för mat hos en viss familj kan uppfattas som observationer x_i av en $N(\mu, \sigma)$-fördelning där $\sigma = 500$ är känd. Utgifterna under en vecka antas oberoende av utgifterna under övriga veckor. Man vill utföra ett test på signifikansnivån 1 % där man testar nollhypotesen $H_0 : \mu = 1900$ mot $H_1 : \mu > 1900$. Som testvariabel används ett medelvärde som är baserat på observationer av utgifterna under 16 olika och slumpmässigt utvalda veckor under ett år. Stickprovsmedelvärdet beräknat på de 16 observationerna blev $\bar{x} = 2150$.
Bestäm testets P-värde.

A: ca 0.31

B: ca 0.023

C: mindre än 0.00003

D: 0.01

Uppgift 10

Antag att ett parti fick 13 % av rösterna i senaste valet. Enligt en gallupundersökning omfattande $n = 750$ personer har andelen p vid ett senare tillfälle skattats till $p^*_{obs} = 15.5\,\%$. Kan vi nu dra slutsatsen att stödet har ökat? Svara på frågan genom att ange det approximativa 95 %-igt ensidiga nedåt begränsade k.i. $I_p = I_p(0.95)$ för den sanna andelen p vid det senare tillfället.
Ledning: $Bin(n, p)$ approximeras av $N\big(np, \sqrt{np(1-p)}\,\big)$ om $np(1-p) \geq 10$.

A: Ja, stödet har ökat på 5 % nivån, ty $I_p \approx (0.1291, +\infty)$.

B: Nej, stödet har inte ökat på 5 % nivån, ty $I_p \approx (0.1291, +\infty)$.

C: Ja, stödet har ökat på 5 % nivån, ty $I_p \approx (0.1333, +\infty)$.

D: Nej, stödet har inte ökat på 5 % nivån, ty $I_p \approx (0.1333, +\infty)$.

Uppgift 11

En man påstår att han bättre än slumpen kan förutsäga färgen på de kort som dras ur en väl blandad kortlek. Hans förmåga prövas i en serie om 20 dragningar (som kan ses som ett slumpmässigt stickprov ur populationen alla tänkbara dragningar). Resulatet blev 14 rätt förutsägande färg och 6 fel. Teoretiskt bör man, om slumpen fick råda, vänta sig 10 rätt förutsägande färg och 10 fel. Mannen har dock lyckats bättre än så. Men är resultatet så bra att det stöder påstående att han har en speciell förmåga? Signifikansnivån väljs till 5 %.

A: Försöket talar för att mannen kan antas ha den utlovade förmågan, ty den observerade testvariabeln Q_{obs} är större än det kritiska χ^2-värdet från tabell.

B: Försöket talar för att mannen kan antas ha den utlovade förmågan, ty den observerade testvariabeln Q_{obs} är mindre än det kritiska χ^2-värdet från tabell.

C: Försöket talar inte för att mannen kan antas ha den utlovade förmågan, ty den observerade testvariabeln Q_{obs} är större än det kritiska χ^2-värdet från tabell.

D: Försöket talar inte för att mannen kan antas ha den utlovade förmågan, ty den observerade testvariabeln Q_{obs} är mindre än det kritiska χ^2-värdet från tabell.

Uppgift 12

Rayleighfördelningen har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{k}\, e^{-x^2/(2k)}, & \text{för } x \geq 0, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna ML-skattningen av konstanten k baserad på data $x_1 = 5$, $x_2 = 14$, $x_3 = 3$, $x_4 = 13$.

A: 199.5

B: 99.75

C: 49.875

D: 7.062

Var god vänd!

Del II

Uppgift 13

En slumpmässigt sammansatt grupp med 10 personer fiskar tillsammans.

(a) Vad är sannolikheten för att *minst två* av dem har födelsedagen på samma dag. (4 p)

(b) Vad är sannolikheten för att *minst tre* av dem har födelsedagen på samma dag. (6 p)

Ledning: Antag att året har 365 dagar och att alla födelsedagskombinationer är lika sannolika.

Uppgift 14

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(x+2y), & 0 < x < 2,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

(a) Bestäm konstanten C. (2 p)

(b) Bestäm täthetsfunktionen $f_X(x)$ för X. (3 p)

(c) Bestäm täthetsfunktionen $f_Z(z)$ för $Z = 9/(X+1)^2$. (5 p)

Uppgift 15

Enligt en omfattande studie börjar barn i genomsnitt tala vid 13 månaders ålder. En barnpedagog tror sig ha funnit en metod att sänka denna ålder. Hon prövar metoden på 12 barn till föräldrar hon känner och får för dessa medelvärdet $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{12}}{12} = 11.6$ månader. Stickprovs standardavvikelsen blev $s = 2.8$ månader. Antag att de 12 mätresultaten $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ är observationer av de oberoende stokastiska variablerna $X_1, X_2, \ldots, X_{12}$ vilka alla är nomalfördelade $N(\mu, \sigma)$.

Är resultatet ett signifikant stöd för metoden på nivån 5 %? Ange tydligt vilka de uppställda hypoteserna är och vad slutsatsen är. Slutsatsen och den tillämpade statistiska metoden bör motiveras för att få full poäng. Slutsatsen bör även tolkas i ord. (10 p)

Uppgift 16

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara observationer av de oberoende stokastiska variablerna $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vilka alla är likformigt fördelade $U(a, 10)$, där a är okänd. Man kan visa att den korrigerade ML-skattningen av a, som är en *väntevärdesriktig skattning*, ges av

$$a^*_{obs} = C(n)\Big(\min_{1\le i\le n} x_i \,-\, B(n)\Big),$$

där $C(n)$ och $B(n)$ är funktioner av n. Bestäm $C(n)$ och $B(n)$. (10 p)

Lycka till!

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMEN I SF1914/SF1915/SF1916
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
TISDAG 21 OKTOBER 2025 KL 8.00–13.00.

Del I, Svar.

1. A

2. D

3. D

4. C

5. C

6. B

7. D

8. A

9. B

10. C

11. D

12. C

Del I, Lösningsförslag.

Uppgift 1

Genom att använda sig av en komplementhändelse:

$$P(\text{att skadas allvarligt minst en gång}) = 1 - P(\text{att INTE skadas alls}) =$$

$$= 1 - (1 - 0.01)^{140} = 0.755135 \approx 0.755$$

Uppgift 2

Fördelningsfunktionen $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\big(2\ln(X) \leq y\big) = P\big(X \leq e^{y/2}\big) = F_X(e^{y/2})$$

Därmed,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\big(F_Y(y)\big) = \frac{d}{dy}\big(F_X(e^{y/2})\big) = F_X'\big(e^{y/2}\big)\, e^{y/2}\,(1/2) = \frac{1}{2}\, e^{y/2}\, f_X\big(e^{y/2}\big)$$

Uppgift 3

Vi har:

$$V(3X - 2Y) = 9V(X) + 4V(Y) - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot C(X, Y) =$$
$$= 9V(X) + 4V(Y) - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \big(\rho(X, Y) \cdot D(X) \cdot D(Y)\big) =$$
$$= (9 \cdot 4) + (4 \cdot 9) - \big(2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \big((-1/12) \cdot 2 \cdot 3\big)\big) = 36 + 36 + 6 = 78.$$

Uppgift 4

Om X, Y och Z är oberoende stokastiska variabler, sådana att $X \in Po(1.5)$, $Y \in Po(0.5)$ och $Z \in Po(0.8)$, så blir s.v. $N = X + Y + Z$ också Poissonfördelad:

$$N \in Po(1.5 + 0.5 + 0.8) = Po(2.8)$$

Därmed:

$$P(N \geq 4) = 1 - P(N \leq 3) = |\text{Tabell 5, för } Po(2.8)| = 1 - 0.6919 = 0.3081 \approx 0.308$$

Uppgift 5

Vi har:

$$Y = \min_{1\le i\le 16} X_i\,,$$

där alla $X_i \in Exp(1)$ och oberoende. Därmed,

$$P(Y \ge 1/4) = P\big(\min_{1\le i\le 16} X_i \ge 1/4\big) = P\big(\cap_{1\le i\le 16}\{X_i \ge 1/4\}\big) = \prod_{1\le i\le 16} P\big(X_i \ge 1/4\big) =$$

$$= |\text{alla } X_i \in Exp(1)| = \Big(P\big(X_1 \ge 1/4\big)\Big)^{16} = \Big(1 - P\big(X_1 \le 1/4\big)\Big)^{16} = \big(1 - F_{X_1}(1/4)\big)^{16}.$$

Vidare, eftersom $X_1 \in Exp(1)$:

$$F_{X_1}(1/4) = 1 - e^{-1/4}.$$

Därmed,

$$P(Y \ge 1/4) = \big(1 - F_{X_1}(1/4)\big)^{16} = \big(1 - (1 - e^{-1/4})\big)^{16} =$$
$$= \big(e^{-1/4}\big)^{16} = e^{-16/4} = e^{-4} = 0.0183 \approx 0.02$$

Uppgift 6

Låt $X \in N(100, 15)$. Vi söker A sådan att:

$$P(X > A) = 0.2\,,$$

eller, enl komplementet,

$$P(X \le A) = 0.8$$

Vidare, efter standartiseringen och från Tabell 1 har vi att A uppfyller:

$$\frac{A - 100}{15} \simeq 0.84\,,$$

eller

$$A = 100 + (0.84)\cdot 15 = 112.6 \approx 113\,.$$

Uppgift 7

Vi har:

$$V(\mu^*) = V(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\, n\, V(X_1) = |X_1 \in Po(\mu)| = \frac{\mu}{n}\,.$$

Därmed,

$$d(\mu^*) = \Big(\sqrt{V(\mu^*)}\Big)^*_{obs} = \left(\sqrt{\frac{\mu}{n}}\right)^*_{obs} = \sqrt{\frac{\mu^*_{obs}}{n}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} = \sqrt{\frac{(5+5+13+7+5)/5}{5}} \approx 1.18$$

Uppgift 8

Stickprov i par. Skillnaderna (Sö-Li) z_i är: 1.2, 0.6, -0.3, 1.7, 0.9 och de är obervationer från $N(\Delta, \sigma)$ s.v. Stickprovsmedelvärde och stickprovstandardavvikelse beräknade på de skillnaderna z_i ovan blir: $\bar{z} = 0.82$ och $s_z = 0.746$. Därmed, eftersom σ är okänd, så blir det 90% k.i. för Δ:

$$I_\Delta(0.9) = \Big(\bar{z} \pm t_{0.05}(n-1)\,\frac{s_z}{\sqrt{n}}\Big) = \Big(0.82 \pm t_{0.05}(4)\,\frac{0.746}{\sqrt{5}}\Big) = |t_{0.05}(4) = 2.13,\ \text{från Tabell 3}| =$$

$$= \big(0.82 \pm 0.71\big) = \big(0.11,\ 1.53\big)\,.$$

Uppgift 9

Vi har:

$$P\text{-värdet} = P\big(\bar{X} \geq 2150 \,\big|\, H_0 \text{ är sann}\,\big) = P\Big(\bar{X} \geq 2150 \,\Big|\, \bar{X} \in N\big(1900, 500/\sqrt{16}\,\big)\Big) =$$

$$= 1 - \Phi\Big(\frac{2150 - 1900}{500/\sqrt{16}}\Big) = 1 - \Phi\big(2\big) = |\text{Tabell 1}| = 1 - 0.97725 \approx 0.023$$

Uppgift 10

Vi har:

$$H_0 :\ p = 0.13$$

$$H_1 :\ p > 0.13$$

Den approxomativa 95 %-iga ensidiga nedåt begränsade k.i. för p:

$$I_p = \left(p^*_{obs} - \lambda_{0.05}\sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}}\,, +\infty\right) = \left(0.155 - \lambda_{0.05}\sqrt{\frac{0.155\cdot(1-0.155)}{750}}\,, +\infty\right) =$$

$$= |\lambda_{0.05} = 1.6449,\ \text{från Tabell 2}| = \big(0.155 - 0.022\,, +\infty\big) = (0.133\,, +\infty)$$

Därmed, kan vi nu påstå att stödet har ökat (på 5% nivån), ty nollhypotes värde $H_0 :\ p = 0.13$ ingår EJ i k.i. $I_p = I_p(0.95) = (0.133\,, +\infty)$. DVS, svaret är C.

Uppgift 11

Vi har:

H_0 : Mannen kan INTE antas bättre än slumpen förutsäga färgen på kort som dras ur ett kortlek.

H_1 : Mannen kan antas bättre än slumpen förutsäga färgen på kort som dras ur ett kortlek.

Teststorheten Q_{obs}:

$$Q_{obs} = \frac{(14-10)^2}{10} + \frac{(6-10)^2}{10} = 3.2$$

Vidare, från Tabell 4: det kritiska χ^2-värdet$= \chi^2_{0.05}(2-1) = \chi^2_{0.05}(1) = 3.84$, eftersom vi har endast två grupper (rätt vs fel förutsägande) och sign.nivån $\alpha = 0.05$.

Slutligen, eftersom $Q_{obs} = 3.2 < 3.84 = \chi^2_{0.05}(1)$, kan vi inte förkasta H_0. Och därmed, talar försöket *inte* för att mannen kan antas ha den utlovade förmågan. Svaret är D.

Uppgift 12

Likelihood-funktionen:

$$L(k) = \prod_{i=1}^{4} \frac{x_i}{k} e^{-x_i^2/(2k)} = k^{-4}\, e^{-\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{4} x_i^2} \prod_{i=1}^{4} x_i\,.$$

Logaritmering ger:

$$\ln\big(L(k)\big) = -4\ln(k) + \sum_{i=1}^{4} \ln(x_i) - -\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{4} x_i^2\,.$$

Nu deriverar vi med avseende på k och sätter sedan derivatan lika med noll, vi får:

$$-\frac{4}{k} - \frac{(-1)}{2k^2}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 0.$$

Slutligen löser vi den erhållna ekvationen med avseende på k, och vi får:

$$k^*_{obs,ML} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \frac{5^2+14^2+3^2+13^2}{8} = 49.875$$

Del II, Lösningsförslag.

Uppgift 13

(a) Vi använder oss av komplementet, och vi får:

$$P(\textit{minst två} \text{ på samma dag}) = 1 - P(\text{alla 10 personer olika dagar}) =$$
$$= 1 \,-\, \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 357 \cdot 356}{365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365} = 1 \,-\, 0.883052 = 0.116948 \;(\approx 11.7\,\%)$$

Eller, med hjälp av en miniräknare:

$$1 \,-\, \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 357 \cdot 356}{365^{10}} = 1 \,-\, \frac{\big(365 \; nPr \; 10\big)}{365^{10}} = 1 \,-\, 0.883052 = 0.116948$$

(b) Även här med tanke på komplementet, och delvis från (a), har vi:

$$P(\textit{minst tre} \text{ på samma dag}) =$$
$$= 1 - \big(P(\text{all 10 personer olika dagar}) + P(\text{två personer på samma dag})\big)\,.$$

Vidare, från (a),

$$P(\text{all 10 personer olika dagar}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 356}{365^{10}} \;\simeq 0.883052\,,$$

och sedan

$$P(\text{två personer på samma dag}) =$$
$$= \binom{10}{2} \cdot \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 358 \cdot 357}{365^{10}} + \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}}{2!} \cdot \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 359 \cdot 358}{365^{10}} +$$
$$+ \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}}{3!} \cdot \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 360 \cdot 359}{365^{10}} + \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{4!} \cdot \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 361 \cdot 360}{365^{10}} +$$
$$+ \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{5!} \cdot \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^{10}} \;\simeq$$
$$\simeq\; 0.111622 + 0.004377 + 0.000061 + 0.000000255 + 0.00000000014 \simeq 0.1161$$

Därmed, slutligen,

$$P(\textit{minst tre} \text{ på samma dag}) =$$
$$= 1 - \big(P(\text{all 10 personer olika dagar}) + P(\text{två personer på samma dag})\big) \simeq$$
$$\simeq 1 - \big(0.883052 + 0.1161\big) = 8.48E^{-4} \;\approx\; 0.00085 \;(\approx 0.1\,\%)$$

Uppgift 14

(a) För den tvådimensionella täthetsfunktionen gäller det att

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy \,=\, 1\,.$$

Vi har:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 C(x+2y)dy = 1.$$

Efter en förenkling, får vi

$$C\Big(\int_0^2 xdx + 4\int_0^1 ydy\Big) = 1,$$

som ger:

$$C\big(\,2+2\,\big) = 1.$$

Därmed, $C = 1/4$.

(b) Vi har:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^1 \frac{1}{4}(x+2y)\,dy = \frac{1}{4}\,x + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\,,$$

dvs, $f_X(x) = (1/4)x + 1/4$, om $0 < x < 2$, och 0, annars.

(c) Först, bestämmer vi fördelningsfunktionen för s.v. X:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_0^x \big((1/4)t + 1/4\big)dt = \frac{1}{4}\Big(\,\frac{x^2}{2} + x\,\Big) \quad \text{för } 0 < x < 2\,.$$

Vidare, fördelningsfunktionen för s.v. Z blir, för $z > 0$:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\Big(\,\frac{9}{(X+1)^2} \le z\Big) = P\Big(\,\frac{9}{z} \le (X+1)^2\Big) =$$

$$= P\Big(\,X+1 \ge \frac{3}{\sqrt{z}}\Big) = P\Big(\,X \ge \frac{3}{\sqrt{z}} - 1\Big) = 1 - F_X\Big(\frac{3}{\sqrt{z}} - 1\Big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\,\frac{\left(\frac{3}{\sqrt{z}} - 1\right)^2}{2} + \frac{3}{\sqrt{z}} - 1\,\right) = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{9}{z} - \frac{6}{\sqrt{z}} + 1\Big) + \frac{3}{\sqrt{z}} - 1\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\Big(\frac{9}{2z} - \frac{3}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{z}} - 1\Big) = \frac{9}{8} - \frac{9}{8}\,z^{-1}\,,$$

där $0 < \frac{3}{\sqrt{z}} - 1 < 2$, dvs $1 < z < 9$.

Därmed, $f_Z(z) = (F_Z(z))' = 9/(8z^2)$, om $1 < z < 9$, och $f_Z(z) = 0$, annars.

Uppgift 15

Noll- och mothypoteser:
$H_0 : \mu = 13\,(= \mu_0)$,
$H_1 : \mu < 13$.

Här är σ okänd, och därför är teststorheteh:
$t_{obs} = (\bar{x} - \mu_0)/(s/\sqrt{n}) = (11.6 - 13)/(2.8/\sqrt{12}) = -1.732$,

Från Tabell 3 och eftersom mothypotesen H_1 är ensidig, får vi det kritiska värdet till:
$-t_{0.05}(11) = -1.80$

Beslutsregel: förkasta H_0 om $t_{obs} < -t_{0.05}(11)$.

Slutsats: H_0 kan EJ förkastas, ty $t_{obs} = -1.732 > -1.8 = -t_{0.05}(11)$.

Tolkning: på 5 % signifikansnivån kan vi EJ påstå att resultatet
av studie gav ett stöd för att det uppfunna metoden
minskar ålder då barn i genomsnitt börjar tala.

Uppgift 16

Vi vet att

$$a^*_{obs} = C(n)\Big(\min_{1\le k\le n} x_k \,-\, B(n)\Big)$$

är en väntevärdesriktig skattning av a. DVS.,

$$E(a^*) = C(n)\Big(E\big(\min_{1\le k\le n} X_k\big) - B(n)\Big) = a\,.$$

Fördelningsfunktionen för $\min_{1\le k\le n} X_k$ blir:

$$F_{\min_{1\le k\le n} X_k}(y) = P\big(\min_{1\le k\le n} X_k \le y\big) = 1 - P\big(\min_{1\le k\le n} X_k \ge y\big) =$$

$$= 1 - P\big(\text{alla}_k\{X_k \ge y\}\big) = |\text{oberoendet}| =$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k \ge y) = |\text{lika fördelning}| = 1 - \Big(P(X_1 \ge y)\Big)^n =$$

$$= 1 - \Big(1 - F_{X_1}(y)\Big)^n = |X_1 \in U(a,10)| = 1 - \Big(1 - \frac{y-a}{10-a}\Big)^n =$$

$$= 1 - \Big(\frac{10-y}{10-a}\Big)^n,$$

och därmed blir täthetsfunktionen för s.v. $\min_{1\le k\le n} X_k$ lika med:

$$f_{\min_{1\le k\le n} X_k}(y) = \frac{dF_{\min_{1\le k\le n} X_k}(y)}{dy} = n\,\frac{(10-y)^{n-1}}{(10-a)^n}\,,$$

om $a \le y \le 10$, och 0 annars. Därför har vi:

$$E\Big(\min_{1\le k\le n} X_k\Big) = \int_a^{10} y\,\frac{n\,(10-y)^{n-1}}{(10-a)^n}\,dy = |10-y=u, dy=-du| =$$

$$= \frac{n}{(10-a)^n}\int_0^{10-a}(10-u)u^{n-1}du = |\text{ enkla beräkningar }| = \frac{10+na}{n+1} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\,a + \frac{10}{n+1}\,.$$

Följaktligen:

$$B(n) = \frac{10}{n+1}$$

och

$$C(n) = \frac{n+1}{n}\,.$$