



KTH Matematik

Avd. Matematisk statistik

KONTROLLSKRIVNING I SF1920 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,  
FREDAGEN DEN 6:e FEBRUARI 2026 KL 8.00–10.00.

*Tillåtna hjälpmedel:* miniräknare.

Kontrollskrivningen består av 5 uppgifter. Varje uppgift kan ge antingen 1 eller 0 poäng (korrekt svar ger 1 poäng, felaktigt svar ger 0 poäng). Svara med minst **fyra värdesiffrors** noggrannhet på svarsblanketten. För godkänt krävs minst 3 av maximalt 5 poäng.

### Uppgift 1

För de tre oberoende händelserna  $A$ ,  $B$  och  $C$  gäller att  $P(A^*) = 0.53$ ,  $P(B^*) = 0.35$  och  $P(C) = 0.83$ .

Bestäm  $P(A \cup B \cup C)$ .

### Uppgift 2

En stokastisk variabel  $X$  har följande täthetsfunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Bestäm täthetsfunktionen för  $Y = X^2$  i punkten  $y = 2$ , dvs bestäm  $f_Y(2)$ .

### Uppgift 3

En stokastisk variabel  $X$  har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Beräkna väntevärdet  $E(e^{-2X})$ .

**Var god vänd!**

**Uppgift 4**

En person ska ta två bussar. De motsvarande väntetiderna  $X_1$  och  $X_2$  är två stokastiska variabler sådana att de är oberoende och  $U(0, 10)$ -fördelade, dvs

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

där  $i = 1, 2$ . Vad är sannolikheten att den totala väntetiden  $X_1 + X_2$  blir högst 12 minuter?

*Ledning:* Det kan underlätta om man ritar upp utfallsrummet.

**Uppgift 5**

Den simultana sannolikhetsfunktionen för den diskreta tvådimensionella stokastiska variabeln  $(X, Y)$  är:

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 1) &= 0.2, & P(X = 1, Y = 1) &= 0.3, \\ P(X = 0, Y = 2) &= 0.3, & P(X = 1, Y = 2) &= 0.2. \end{aligned}$$

Bestäm korrelationskoefficienten  $\rho(X, Y)$ .

*Ledning:* Korrelationskoefficienten för  $X$  och  $Y$  definieras av

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)},$$

där kovariansen  $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ .

**Lycka till!**

**Facit**

Uppgift 1: 0.968465 (eller 0.9685)

Uppgift 2: 0.07322 (eller 0.0732)

Uppgift 3: 0.12496 (eller 0.1250)

Uppgift 4: 0.6800 (eller 0.68)

Uppgift 5: -0.2 (eller -0.2000)

## Lösningsförslag

### Uppgift 1

Vi har:  $P(A) = 1 - P(A^*) = 0.47$ ,  $P(B) = 1 - P(B^*) = 0.65$  och  $P(C) = 0.83$ .

Därför,

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \\ &= |\text{oberoende händelser}| = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(A)P(B)P(C) = \\ &= 0.47 + 0.65 + \dots + (0.47)(0.65)(0.83) \approx 0.968465 \end{aligned}$$

### Uppgift 2

Vi har för  $1 \leq y \leq 9$ :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(1 \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}).$$

Om vi nu deriverar:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_Y(y)) = \frac{d}{dy}(F_X(\sqrt{y})) = F'_X(\sqrt{y}) \frac{d(\sqrt{y})}{dy} = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Därmed, eftersom  $1 < \sqrt{2} < 3$ ,

$$f_Y(2) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4\sqrt{2}} \approx 0.07322$$

### Uppgift 3

Täthetsfunktionen för s.v.  $X$  blir  $f_X(x) = F'_X(x) = (1/4) \cdot 1_{[0,4]}(x)$ .

Därmed,

$$E(e^{-2X}) = \int_0^4 e^{-2x} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^4 \right) = \frac{1}{8} (1 - e^{-8}) = 0.124958 \approx 0.12496$$

### Uppgift 4

Vi använder oss av en geometrisk tolkning av sannolikheten, dvs Definition 4.5 (s. 88 i Blom).

Eftersom  $X_1$  och  $X_2$  är oberoende s.v., så blir  $[0, 10] \times [0, 10] \subset \mathbb{R}^2$  – utfallsrummet för den tvådimensionella s.v.  $(X, Y)$ , och vi söker  $P(X_1 + X_2 \leq 12)$ . Om man nu ritat det utfallsrummet  $[0, 10] \times [0, 10] = [0, 10]^2$  och markerar komplementområdet till det området som sannolikheten söks för, ser man att

$$P(X_1 + X_2 \leq 12) = 1 - P(X_1 + X_2 > 12),$$

där området i den högra leden

$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \{x_1 + x_2 > 12\} \cap [0, 10]^2\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \{x_2 > 12 - x_1\} \cap [0, 10]^2\}$  är en rätvinklig likbent triangel med lika ben som är lika med 8 (dvs  $10 - (12 - 10) = 8$ , där  $12 - 10 = 2$  är ju  $x_1$ -koordinaten av korsningspunkten mellan linjen  $x_2 = 12 - x_1$  och kvadratsidan  $x_2 = 10$ ). Rita!

Därför, har vi enl geometrisk tolkning av sannolikheten:

$$P(X_1 + X_2 > 12) = \frac{\text{arean av } A}{10^2} = \frac{8^2/2}{10^2} = 0.32,$$

och därmed,

$$P(X_1 + X_2 \leq 12) = 1 - P(X_1 + X_2 > 12) = 1 - 0.32 = 0.68$$

### Uppgift 5

Vi har:

$$E(XY) = \sum_{i,j} ijP(X = i, Y = j) = (0)(1)(0.2) + (0)(2)(0.3) + (1)(1)(0.3) + (1)(2)(0.2) = 0.7.$$

De marginella sannolikhetsfunktionerna är:

$$P(X = 0) = 0.2 + 0.3 = 0.5, \quad P(X = 1) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

för  $X$  så att

$$E(X) = (0)0.5 + (1)0.5 = 0.5,$$

och

$$P(Y = 1) = 0.2 + 0.3 = 0.5, \quad P(Y = 2) = 0.3 + 0.2 = 0.5$$

för  $Y$  så att

$$E(Y) = (1)0.5 + (2)0.5 = 1.5$$

Därmed,

$$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.7 - (0.5)(1.5) = -0.05.$$

Vidare,

$$E(X^2) = (0^2)(0.5) + (1^2)(0.5) = 0.5,$$

så att  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0.5 - 0.5^2 = 0.25$  och därför

$$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.25} = 0.5,$$

samt

$$E(Y^2) = (1^2)(0.5) + (2^2)(0.5) = 2.5,$$

så att  $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2.5 - 1.5^2 = 0.25$  och därför

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

Slutligen har vi:

$$\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)} = \frac{-0.05}{(0.5)(0.5)} = -0.2$$