



KTH Matematik

Avd. Matematisk statistik

TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
FREDAG 5 JUNI 2026 KL 8.00–13.00.

Examinator: Mykola Shykula, 076-830 08 01

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II.

Del I består av uppgifterna 1–12 och varje korrekt svar ger 1 poäng. På denna del ska endast svar anges i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen på de uppgifter där svarsalternativ finns, annars skall svaret ges som ett numeriskt värde med minst *fyra* värdesiffrors noggrannhet! Svaren ska anges på svarsblanketten (utdelas vid tentamen). Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1–3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter (i svarsblanketten anges då ordet "Bonus"). Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen behöver ej besvara uppgift 12, utan får tillgodoräkna sig denna uppgift (i svarsblanketten anges då ordet "Bonus"). Dessa tillgodoräkningen och bonuspoäng gäller endast för den här tentamen. Gränsen för godkänt är 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 8 poäng.

Del II består av uppgifterna 13–16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på eller får komplettera del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del ska resonemang och uträkningar vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar ska förklaras och definieras samt numeriska svar ska anges med minst *fyra* värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen får dessutom tre bonuspoäng på del II.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

Om en person har en viss sjukdom så visar ett test för sjukdomen positivt med sannolikhet 0.98. Om personen inte har sjukdomen visar testet negativt med sannolikheten 0.97. Antag att förekomsten är 4 på 1000 att någon i populationen har sjukdomen. Antag att testet visar positivt. Vad är då sannolikheten att personen inte har sjukdomen?

Uppgift 2

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} x/4 & \text{om } 0 \leq x \leq \sqrt{8}, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

En ny stokastisk variabel Y bildas genom $Y = X^2 - 2X + 1$.

Bestäm $P(Y \leq 1)$.

Uppgift 3

De två diskreta stokastiska variablerna X och Y har den simultana sannolikhetsfunktionen

$p_{X,Y}(x, y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	0.1	0.2	0.1
$x = 1$	0.1	0.2	a
$x = 2$	0.1	0.2	0

Beräkna $D(X + Y)$.

A: 3.7

B: 1.92

C: 0.9

D: 0.81

Uppgift 4

Låt $X \in Exp(0.2)$, dvs $E(X) = 5$. Bestäm $P(X > 10 \mid X > 5)$.

A: ca 0.368

B: ca 0.233

C: ca 0.135

D: 0.5

Uppgift 5

Låt $X_1 \in U(0, 2)$, $X_2 \in U(0, 3)$ och $X_3 \in U(0, 4)$. X_1 , X_2 och X_3 är oberoende. Låt $Y = \min(X_1, X_2, X_3)$.

Bestäm $P(Y \geq 1)$.

A: $\frac{1}{24}$

B: $\frac{1}{3}$

C: $\frac{1}{2}$

D: $\frac{1}{4}$

Uppgift 6

Sara ska veckohandla i en stor affär och göra ett inköp på 48 artiklar. Antag att alla belopp avrundas vart och ett till hela kronor. Avrundningsfelen X_1, X_2, \dots, X_{48} antas vara oberoende stokastiska variabler som är likformig fördelade $U(-0.5, 0.5)$. Saras totala avrundningsfel betecknas $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{48}$.

Bestäm $a > 0$ sådan att $P(|X| \leq a) = 0.95$. Använd tillåten approximation.

A: 0.58

B: 1.96

C: 3.92

D: 7.84

Uppgift 7

Vid en kvalitetskontroll plockar man slumpmässigt ut 1000 enheter från produktionen och antar att varje enhet man undersöker har samma sannolikhet att vara felaktig. Antal felaktiga enheter som man hittar kan ses som en stokastisk variabel X . Anta att 50 av de 1000 undersökta enheterna är felaktiga och vi därmed skattar andelen felaktiga i produktionen till 0.05. Ange medelfelet för denna skattning.

A: 0.007

B: 0.033

C: 0.048

D: 0.218

Uppgift 8

Låt $X \in N(\mu_X, \sigma)$ och $Y \in N(\mu_Y, \sigma)$. Vi gör 10 observationer på X och får att $\bar{x} = 19.5$ och $s_X = 2.01494$. Vi gör även 10 observationer på Y och får att $\bar{y} = 13.9$ och $s_Y = 1.8655$. Vi antar att alla observationer är utfall av stokastiska variabler som är oberoende. Ta fram ett tvåsidigt konfidensintervall för skillnaden $\mu_X - \mu_Y$ som har konfidensgrad 90%, och ange nedre gränsen.

A: ca 5.6

B: ca 4.4

C: ca 4.1

D: ca 0.0

Uppgift 9

Antag att $X \in \text{ffg}(p)$. Vi vill testa $H_0 : p = 0.5$ mot alternativet $H_1 : p = 0.2$. Vi förkastar H_0 till förmån för H_1 om vi får ett utfall $x \geq 4$. Vi får en observation: $x = 5$.

Bestäm testets styrka.

A: 0.640

B: 0.512

C: 0.4096

D: ca 0.33

Uppgift 10

En tärning kastades 96 gånger, och följande frekvenser av ettor, tvåor, etc. erhöles: 16, 6, 12, 20, 24, 18. Man vill testa nollhypotesen att tärningen är välbalanserad, och χ^2 -test av given fördelning kan användas eftersom urvalet är tillräckligt stort. Vi beräknar teststorheten Q . Risknivån har valts till 5%. Vilket av följande påståenden är sant?

A: Teststorheten $Q = 12.5$, och vi därför hävdar på nivån 5% att tärningen inte är välbalanserad.B: Teststorheten $Q = 12.5$, och vi därför hävdar på nivån 5% att tärningen är välbalanserad.C: Teststorheten $Q = 3.54$, och vi därför hävdar på nivån 5% att tärningen inte är välbalanserad.D: Teststorheten $Q = 3.54$, och vi därför hävdar på nivån 5% att tärningen är välbalanserad.

Uppgift 11

Låt X_1 och X_2 vara oberoende stokastiska variabler med fördelningar $Po(2\lambda)$ och $Po(3\lambda)$, respektive. Beräkna maximum-likelihood-skattningen för λ givet utfallen $x_1 = 2$ och $x_2 = 8$.

- A: 1
- B: 2
- C: 3
- D: 4

Uppgift 12

Följande datamaterial beskriver hur försäljningen av en vara beror av hur mycket som spenderats på reklam.

Reklam (kkr)	28	39	45	53	59	62	64
Försäljning (kkr)	315	335	340	350	352	343	345

Utifrån datamaterialet ovan skattas följande regressionsmodell (dvs modell med både linjär och kvadratisk term):

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 7,$$

där y_i = försäljning (kkr) beror av x_i = reklamkostnad (kkr) och ε_i betecknar slumpmässiga fel. Minsta-kvadrat-skattningarna av regressionskoefficienterna α , β och γ blev $\alpha_{obs}^* = 213.2$, $\beta_{obs}^* = 4.809$ respektive $\gamma_{obs}^* = -0.0429$.

95%-iga konfidensintervall $I_\beta(0.95)$ och $I_\gamma(0.95)$ har beräknats, $I_\beta(0.95) = (2.156, 7.463)$, samt $I_\gamma(0.95) = (-0.0711, -0.0147)$.

Man kontrollerar vidare om den effekt som reklamkostnaden har på försäljningen är signifikant, dvs man testar $H_{0,\beta} : \beta = 0$ mot $H_{1,\beta} : \beta \neq 0$ samt $H_{0,\gamma} : \gamma = 0$ mot $H_{1,\gamma} : \gamma \neq 0$. Vidare beräknas två P-värden för de två testen. Vilken slutsats kan man dra?

- A: Båda P-värdena är mindre än 0.05, och därför är ingen av de två termerna (dvs den linjära eller den kvadratiske) i regressionsmodellen signifikant på risknivån 5 %.
- B: Båda P-värdena är mindre än 0.05, och därför är båda termerna (dvs den linjära och den kvadratiske) i regressionsmodellen signifikanta på risknivån 5 %.
- C: Båda P-värdena är större än 0.05, och därför är ingen av de två termerna (dvs den linjära eller den kvadratiske) i regressionsmodellen signifikant på risknivån 5 %.
- D: Båda P-värdena är större än 0.05, och därför är båda termerna (dvs den linjära och den kvadratiske) i regressionsmodellen signifikanta på risknivån 5 %.

Var god vänd!

Del II

Uppgift 13

En stad utgörs av fyra öar – vi kan kalla dem A , B , C och D – vilka är sammanbundna med broar enligt följande: en bro mellan A och B , en bro mellan B och C , en bro mellan C och D , samt två broar mellan A och C . Samtliga fem broar är öppnade oberoende av varandra (OBS!!! Öppen=färdbar, dvs att man kan ta sig vidare via den bron). Antag att sannolikheten är $p = 0.6$ att en på måfå vald bro är öppen.

- (a) Vad är sannolikheten att precis två broar är öppna? (2 p)
- (b) Hur stor är chansen att man ta sig från ön A till ön B , givet att det är precis två broar öppna. (4 p)
- (c) Antag att du befinner dig på ön A . Vad är sannolikheten att broarna är öppna på ett sätt så att du kan ta dig från ön A till ön D . (4 p)

Uppgift 14

Om två oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter $a > 0$ adderas får man en s.k. Erlangfördelning, efter en dansk teleingenjör. Denna fördelning har viktiga tekniska tillämpningar: t.ex. är summan av väntetid och betjäningstid i ett kösystem ofta Erlangfördelad, eftersom man antar att såväl väntetid som betjäningstid är exponentialfördelade. Erlangfördelningen har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Bestäm MK-skattningen av parametern a baserad på oberoende observationerna x_1, x_2, \dots, x_n av den Erlangfördelade stokastiska variabeln X . (10 p)

Uppgift 15

Försökpersoners reaktionstider i sekunder vid ett visst psykologiskt test kan antas vara normalfördelade med väntevärde μ och den kända standardavvikelsen $\sigma = 2$. För att testa $H_0 : \mu = 25$ mot $H_1 : \mu < 25$ gör man n st observationer och får medelvärdet \bar{x} .

- (a) Ställ upp det villkor, uttryckt i \bar{x} och n , som skall gälla för att H_0 skall förkastas på 5%-nivån. (5 p)
- (b) Bestäm testets styrka för alternativet $\mu = 24$ då $n = 25$? (5 p)

Uppgift 16

Låt $X \in N(0, 1)$ och $Y \in N(0, 1)$ vara två oberoende stokastiska variabler.

(a) Låt $\eta = X^2$. Bestäm täthetsfunktionen för den stokastiska variabeln η . (5 p)

(b) Låt $\xi = X^2 + Y^2$. Bestäm täthetsfunktionen för den stokastiska variabeln ξ . (5 p)

Ledning: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$

Lycka till!



KTH Matematik

Avd. Matematisk statistik

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
FREDAG 5 JUNI 2026 KL 8.00–13.00.

Del I, Svar.

1. 0.884

2. 0.5

3. C

4. A

5. D

6. C

7. A

8. C

9. B

10. A

11. B

12. B

Del II, Svar.

13. (a) $0.2304 = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$; (b) $0.6 = \frac{(4+2)p^2(1-p)^3}{\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3}$; (c) $0.53856 = 2p^2 - 2p^4 + p^5$

14. $a_{MK,obs}^* = 2/\bar{x}$

15. (a) $\bar{x} < 25 - \frac{3.29}{\sqrt{n}}$; (b) 0.8051

16. (a) $f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$, $y \geq 0$; (b) $f_\xi(z) = \frac{1}{2} e^{-z/2}$, $z \geq 0$, dvs, $\xi \in Exp(1/2)$

Del I, Lösningsförslag.**Uppgift 1**

Låt S = sjuk, F = frisk,
 DS = testet för sjukdomen visar positivt,
 DF = testet för sjukdomen visar negativt.

Vi har:

$$P(S) = 0.004, P(F) = 0.996, \text{ och } P(DS|S) = 0.98, P(DF|F) = 0.97.$$

Vi söker: $P(F|DS) = |\text{Den betingade sannolikheten}| =$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(DS|F)P(F)}{P(DS)} = |\text{LTS}| = \frac{P(DS|F)P(F)}{P(DS|F)P(F) + P(DS|S)P(S)} = \\ &= \frac{(1 - 0.97)(0.996)}{(1 - 0.97)(0.996) + (0.98)(0.004)} = 0.884 \end{aligned}$$

Uppgift 2

Vi har:

$$\begin{aligned} P(Y \leq 1) &= P(X^2 - 2X + 1 \leq 1) = P((X - 1)^2 \leq 1) = P(-1 \leq (X - 1) \leq 1) = \\ &= P(0 \leq X \leq 2) = |2 < \sqrt{8}| = \int_0^2 \frac{x}{4} dx = \left[\frac{x^2}{8} \right]_0^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Uppgift 3

Först,

$$a = 1 - (4(0.1) + 3(0.2)) = 0.$$

Enligt definitionen, $D(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)}$ och

$$V(X + Y) = E(X + Y)^2 - (E(X + Y))^2.$$

Vi har:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1(0.3) + 2(0.3) = 0.9, \\ E(Y) &= 1(0.6) + 2(0.1) = 0.8, \\ E(X^2) &= 1^2(0.3) + 2^2(0.3) = 1.5, \\ E(Y^2) &= 1^2(0.6) + 2^2(0.1) = 1.0, \text{ och} \\ E(XY) &= 1(1)(0.2) + 1(2)(0.2) = 0.6 \end{aligned}$$

Därför,

$$E(X + Y)^2 = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) = 1.5 + 1 + 2(0.6) = 3.7$$

Därmed,

$$D(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{3.7 - (0.9 + 0.8)^2} = \sqrt{0.81} = 0.9$$

Uppgift 4

Enligt minneslöshetsegenskap hos exponentialfördelningen:

$$P(X > 10 | X > 5) = P(X > 10 - 5) = P(X > 5).$$

Eftersom $X \in \text{Exp}(0.2)$, har vi:

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_X(5) = |X \in \text{Exp}(0.2)| = \\ &= 1 - (1 - e^{-(0.2)5}) = e^{-1} \simeq 0.368 \end{aligned}$$

Uppgift 5

$X_1 \in U(0, 2)$, $X_2 \in U(0, 3)$ och $X_3 \in U(0, 4)$. X_1 , X_2 och X_3 är oberoende.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= P(\min(X_1, X_2, X_3) \geq 1) = P(\{X_1 \geq 1\} \cap \{X_2 \geq 1\} \cap \{X_3 \geq 1\}) = \\ &= |\text{oberoendet}| = P(X_1 \geq 1)P(X_2 \geq 1)P(X_3 \geq 1) = \\ &= \left((2-1)\frac{1}{2}\right) \left((3-1)\frac{1}{3}\right) \left((4-1)\frac{1}{4}\right) = \left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) \left(3 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Uppgift 6

Eftersom $X_i \in U(-0.5, 0.5)$, har vi enl CGS:

$$X = X_1 + \dots + X_{48} \sim N(48(0), \sigma\sqrt{48}),$$

där $\sigma_{X_i} = \sqrt{\frac{(0.5 - (-0.5))^2}{12}} = \sqrt{\frac{1}{12}}$.

Och, därmed,

$$X = X_1 + \dots + X_{48} \sim N\left(0, \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{48}\right) \sim N(0, \sqrt{4}) \sim N(0, 2),$$

dvs $\mu_X = 0$ och $\sigma_X = 2$. Slutligen, enligt 2- σ regel:

$$a \approx 2(\sigma_X) = 4,$$

dvs svaret är C .

Uppgift 7

$$d(p^*) = \sqrt{\frac{p_{obs}^*(1 - p_{obs}^*)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{50}{1000} \left(1 - \frac{50}{1000}\right)}{1000}} = 0.00689$$

Uppgift 8

Eftersom $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, beräknar vi den nedre gränsen av k.i. $I_{\mu_X - \mu_Y}(0.9)$ till

$$\begin{aligned} \bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha/2}(n_X + n_Y - 2) \sqrt{\frac{(n_X - 1)s_X^2 + (n_Y - 1)s_Y^2}{n_X + n_Y - 2}} \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}} &= \\ &= |\alpha = 1 - 0.9 = 0.1, n_X = n_Y = 10| = \\ &= 19.5 - 13.9 - t_{0.05}(18) \sqrt{\frac{(10 - 1)(2.01494)^2 + (10 - 1)(1.8655)^2}{18}} \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \\ &= |t_{0.05}(18) = 1.73| = \\ &= 19.5 - 13.9 - 1.73 \sqrt{\frac{(10 - 1)(2.01494)^2 + (10 - 1)(1.8655)^2}{18}} \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} = \\ &\simeq 4.0977788 \end{aligned}$$

Uppgift 9

$$\begin{aligned} h(0.2) &= P(\text{förfasta } H_0 \mid p = 0.2) = P(X \geq 4 \mid X \sim \text{ffg}(0.2)) = \\ &= 1 - P(X \leq 3 \mid X \sim \text{ffg}(0.2)) = 1 - (0.2 + (0.8)(0.2) + (0.8^2)(0.2)) = 0.512 \end{aligned}$$

Uppgift 10

$\alpha = 0.05$. Under nollhypotesen, dvs att tärningen är välbalanserad, är frekvenser av ett, tvåor etc är $96/6 = 16, 16, \dots, 16, 16$. Vi beräknar teststorheten Q :

$$Q_{obs} = \sum_i \frac{(x_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{(16 - 16)^2}{16} + \frac{(6 - 16)^2}{16} + \dots + \frac{(24 - 16)^2}{16} + \frac{(18 - 16)^2}{16} = 12.5$$

Från Tabell 4, $\chi_{\alpha}^2(r - 1) = \chi_{0.05}^2(6 - 1) = 11.1$, och vi har:

$$Q_{obs} = 12.5 > 11.1 = \chi_{0.05}^2(5).$$

Därmed, kan nollhypotesen förkastas, och därför hävdar vi på 5% att tärningen inte är välbalanserad. Dvs, svaret är *A*.

Uppgift 11

$X_1 \sim Po(2\lambda)$, $X_2 \sim Po(3\lambda)$.

Likelihood-funktionen:

$$L(\lambda) = L(\lambda; x_1, x_2) = \frac{(2\lambda)^{x_1} (3\lambda)^{x_2}}{x_1! x_2!} e^{-2\lambda - 3\lambda}.$$

Ekvationen $\frac{d(\ln(L(\lambda)))}{d\lambda} = 0$ blir:

$$\frac{d(\ln(L(\lambda)))}{d\lambda} = \left(\frac{x_1}{2\lambda} \cdot 2\right) + \left(\frac{x_2}{3\lambda} \cdot 3\right) - 5 = 0,$$

och därmed

$$\lambda_{ML,obs}^* = \frac{x_1 + x_2}{5} = \frac{2\bar{x}}{5} = \frac{2 \cdot \frac{2+8}{2}}{5} = 2$$

Uppgift 12

Eftersom noll inte ingår i någon av de två k.i. $I_\beta(0.95)$ och $I_\gamma(0.95)$, så kan man förkasta båda $H_{0,\beta}$ och $H_{0,\gamma}$, och därför är de båda P -värdena mindre än 0.05. Dvs, faller C och D . Och eftersom vi kan förkasta båda $H_{0,\beta}$ och $H_{0,\gamma}$, är båda termerna (dvs den linjära och den kvadratiska) i regressionsmodellen signifikanta på risknivån 5%. Svaret är B alltså.

Del II, Lösningförslag.

Uppgift 13

(a) Antal broar som är öppna är $Bin(5, p)$ -fördelat, vilket ger att sannolikheten att exakt två broar är öppna är

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10 \cdot 0.6^2 (1-0.6)^3 = 0.2304$$

(b) Låt E vara händelsen att exakt två broar är öppna och F händelsen att det går att ta sig från A till B . Vi söker $P(F|E)$ som per definition ges av

$$\frac{P(F \cap E)}{P(E)}.$$

Det finns $\binom{5}{2}$ olika sätt för två exakt broar att vara öppna och dessa utgör händelsen E . Händelsen $F \cap E$ består då av fallen, bland de tio, där det också går att ta sig från A till B . Det finns totalt sex uppsättningar med två broar som ger en sådan väg: fyra möjliga kombinationer som innehåller bron mellan A och B samt två som inte innehåller den bron. Varje specifik kombination av två öppna broar har samma sannolikhet, $p^2(1-p)^3$. Tillsammans ger det att

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{(4+2)p^2(1-p)^3}{\binom{5}{2}p^2(1-p)^3} = \frac{6}{10} = 0.6, \quad \text{dvs ca 60\% chans.}$$

(c) Om det ska gå att nå ön D måste bron CD vara öppen samt minst en av följande gälla: (i) minst en av de två broarna mellan A och C är öppen, eller (ii) broarna mellan A och B samt mellan B och C är bägge öppna. Då får vi att den sökta i uppgiften sannolikheten är

$$pP((i) \cup (ii)) = p\left(P(i) + P(ii) - P(i)P(ii)\right),$$

ty samtliga fem broar är öppnade oberoende av varandra.

Sammantaget har dessa alternativ då sannolikheten

$$\begin{aligned}
 pP((i) \cup (ii)) &= p\left(P(i) + P(ii) - P(i)P(ii)\right) = \\
 &= p\left((1 - (1 - p)^2) + p^2 - p^2(1 - (1 - p)^2)\right) = \\
 &= p(1 - 1 + 2p - p^2 + p^2 - p^2 + p^2 - 2p^3 + p^4) = \\
 &= 2p^2 - 2p^4 + p^5 = \\
 &= |p = 0.6| = 0.53856
 \end{aligned}$$

Uppgift 14

$a > 0$. Först, kan man anta att $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$, ty de samtliga n observationerna kommer från samma fördelning. Vi har:

$$Q = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

där

$$\begin{aligned}
 \mu = E(X) &= \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_0^\infty x a^2 x e^{-ax} dx = \\
 &= a \int_0^\infty x^2 (a e^{-ax}) dx = |Y \sim \text{Exp}(a)| = aE(Y^2) = \\
 &= a\left(V(Y) + (E(Y))^2\right) = a\left(\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right) = \frac{2}{a}.
 \end{aligned}$$

Vi har nu:

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{2}{a}\right)^2.$$

Nu deriverar vi funktionen Q map a och ställer löser ekvationen

$$\frac{dQ}{da} = 2 \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{2}{a}\right) (-2) (-1) \frac{1}{a^2} = 0,$$

och vi får

$$\sum_{i=1}^n x_i - n \frac{2}{a} = 0.$$

Detta ger oss slutligen att den sökta MK-skattningen av den okända parametern a är:

$$a_{obs}^* = a_{MK,obs}^* = 2/\bar{x}.$$

Uppgift 15

(a) Enligt Tabell 2, förkastar vi H_0 på sign.nivån 5% om

$$z_{obs} = \frac{\bar{x} - 25}{\sigma/\sqrt{n}} < -1.645.$$

Med en omskrivning leder detta till följande villkoret, uttryckt i \bar{x} och n , som skall gälla för att H_0 skall förkastas:

$$\bar{x} < 25 - 1.645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

eller, med tanke på att $\sigma = 2$,

$$\bar{x} < 25 - \frac{3.29}{\sqrt{n}},$$

(b) Testets styrka för alternativet $\mu = 24$ då $n = 25$ räknas till:

$$\begin{aligned} h(24) &= \\ &= P(\text{förkasta } H_0 \mid H_1 \text{ är sann}) = |\text{från (a)}| = \\ &= P\left(\bar{X} < 25 - \frac{3.29}{\sqrt{25}} \mid \bar{X} \sim N(24, 2/\sqrt{25})\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{25 - \frac{3.29}{5} - 24}{2/5}\right) = \\ &= \Phi(0.855) = |\text{Tabell 1}| = 0.8051 \end{aligned}$$

Uppgift 16

(a) Vi har att fördelningsfunktionen för η ges av

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= P(\eta \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= \{\text{kontinuerlig fördelning}\} = P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Här krävs uppenbarligen att $y \geq 0$.

Genom att derivera får vi täthetsfunktionen för η som

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= \frac{d}{dy} F_\eta(y) = \frac{d}{dy} [F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})] \\ &= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

för $y \geq 0$. Ur formelsamlingen hämtar man att täthetsfunktionen för en standard normalfördelning ges av

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Insatt i uttrycket för $f_Y(y)$ ger detta att

$$f_\eta(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2},$$

för $y \geq 0$.

(b) Låt $\zeta = Y^2$. Då har vi:

$$\xi = \eta + \zeta.$$

Eftersom X och Y är oberoende så är även $\eta = X^2$ och $\zeta = Y^2$ också det. Detta innebär att täthetsfunktionen för s.v. ξ kan vi ta fram mha faltningsformeln och resultat från (a).

Vi har enligt faltningsformeln:

$$\begin{aligned} f_\xi(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_\zeta(z-x)f_\eta(x)dx = |x \geq 0, z-x \geq 0, \text{ dvs } x \leq z| = |(a)| = \\ &= \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi(z-x)}} e^{-(z-x)/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} dx = \\ &= \frac{e^{-z/2}}{2\pi} \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(z-x)x}}. \end{aligned}$$

Vi gör nu en integrations byte: $x = zy$, $dx = zdy$, och får då:

$$\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(z-x)x}} = |x = zy| = \int_0^1 \frac{zdy}{\sqrt{(z-zy)zy}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)y}} = \pi,$$

enlig Ledningen. Därmed, $f_\xi(z) = \frac{e^{-z/2}}{2\pi} \pi = \frac{e^{-z/2}}{2} = \frac{1}{2}e^{-z/2}$, då $z \geq 0$, och 0 annars. Dvs, $\xi \sim Exp(\frac{1}{2})$.