



KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Matematiska institutionen
avd matematisk statistik

TENTAMEN I 5B1504 MATEMATISK STATISTIK GRUNDKURS FÖR E3
TORSDAGEN DEN 24 APRIL 2003 KL 08.00–13.00.

Examinator: Lars Holst tel. 790 8649

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik. Beta Mathematics Handbook. Räknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 6 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 24 poäng.

Resultatet anslås senast torsdagen den 15 maj 2003 på Matematisk statistiks anslagstavla i entréplanet, Lindstedtsvägen 25, rakt fram innanför porten.

Tentamen kommer att finnas tillgänglig på elevexpeditionen sju veckor efter skrivningstillfället.

LYCKA TILL!

Uppgift 1

Händelserna A och B har sannolikheterna 0.1 respektive 0.2. Sannolikheten att ingen av händelserna inträffar är 0.75.

- a) Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna A och B inträffar. (5 p)
- b) Beräkna sannolikheten att händelsen A inträffar betingat av att exakt en av händelserna A och B inträffat. (5 p)

Uppgift 2

Vid utbyggnad av ett elektriskt nät skall 120 km kabel läggas ut. Av erfarenhet tror man sig veta, att vad som hinns med olika dagar kan uppfattas som oberoende observationer av en stokastisk variabel med väntevärdet 5.0 km och standardavvikelsen 1.2 km.

Beräkna med lämplig (välmotiverad) approximation sannolikheten att det tar längre tid än 25 dagar att lägga ut kabeln. (10 p)

Uppgift 3

För bestämning av två okända konstanter b och c har vid ett försök följande mätvärden erhållits: $-0.9, 1.2, -1.1, 1.0$. Dessa kan i nämnd ordning uppfattas som observationer av oberoende normalfördelade stokastiska variabler med samma varians och med väntevärdena $-b - c, -b + c, b - c, b + c$ respektive.

Härled skattningar av b och c med maximum-likelihoodmetoden. (10 p)

Uppgift 4

Funktionen g uppfyller $0 < g(x) < 1$ för $0 < x < 1$. För givna $0 < x, y < 1$ är det enkelt att konstatera om $y < g(x)$, trots att det är komplicerat att beräkna $g(x)$. Man önskar beräkna integralen $\int_0^1 g(x)dx$ genom följande variant av Monte-Carlo-metoden: En punkt $P = (X, Y)$ väljs på måfå i enhetskvadraten, dvs X och Y är oberoende stokastiska variabler likformigt fördelade över enhetsintervallet $(0, 1)$. Man noterar om händelsen $A = \{Y < g(X)\}$ inträffar eller ej (Rita!). Vid 100 oberoende upprepningar av detta förfarande har A inträffat 36 gånger.

Beräkna ett konfidensintervall för $\int_0^1 g(x)dx$ med konfidensgrad c:a 95%. (10 p)

Uppgift 5

Låt $U_1, U_2, \dots$ vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler alla med väntevärdet 0 och variansen 1. Bilda

$$X_n = X_{n-1}/2 + U_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

där X_0 är normalfördelad med väntevärdet 0 och varians $4/3$, dessutom är X_0 oberoende av $U_1, U_2, \dots$.

a) Visa att $X_0, X_1, X_2, \dots$ har samma sannolikhetsfördelning. Vilken? (5 p)

b) Hur är den tvådimensionella stokastiska variabeln (X_n, X_{n-1}) fördelad? (5 p)

Uppgift 6

För analys av en viss signal har följande linjära filter använts

$$x_{ut}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|u|} x_{in}(t - u) du.$$

För att undersöka ett signal-brusförhållande behöver man beräkna variansen för utsignalen om insignalen är vitt brus med väntevärdet 0 och den konstanta spektral-tätheten 3. Gör detta! (10 p)

ANMÄRKNING: Med t ex residukalkyl kan visas (detta behöver inte utföras) att

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \pi/4.$$



KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Matematiska institutionen
avd matematisk statistik

LÖSNING TENTAMEN I 5B1504 MATEMATISK STATISTIK GRUNKURS FÖR E3 03-04-24

Uppgift 1

a) Genom att t ex rita en figur ser man att sannolikheten att ingen av A och B inträffar kan skrivas

$$0.75 = P(A^* \cap B^*) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - 0.1 - 0.2 + P(A \cap B),$$

vilket ger $P(A \cap B) = 0.05$. Sökt sannolikhet blir

$$P(A \cap B^*) + P(A^* \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.25 - 0.05 = 0.2.$$

b) Ovanstående ger $P(A \cap B^*) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1 - 0.05 = 0.05$ och den sökta sannolikheten blir

$$P(A \cap B^* | (A \cap B^*) \cup (A^* \cap B)) = 0.05/0.2 = 0.25.$$

Uppgift 2

Låt de oberoende likafördelade stokastiska variablerna X_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, med $E(X_i) = 5.0$ och $D(X_i) = 1.2$ beteckna vad som hinns med olika dagar. På 25 dagar hinns med $X_1 + X_2 + \dots + X_{25}$, som enligt Centrala Gränsvärdessatsen är approximativt $N(5.0 \cdot 25, 1.2\sqrt{25})$ dvs $N(125, 6)$. Den sökta sannolikheten blir

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_{25} < 120) \approx \Phi((120 - 125)/6) = 0.20.$$

Uppgift 3

Bilda likelihoodfunktionen

$$L(b, c, \sigma) = (2\pi\sigma^2)^{-4/2} e^{-Q(b,c)/2\sigma^2}$$

där

$$Q(b, c) = (-0.9 + b + c)^2 + (1.2 + b - c)^2 + (-1.1 - b + c)^2 + (1.0 - b - c)^2.$$

För varje $\sigma > 0$ maximeras L genom att välja b, c så Q minimeras. Derivering och förenkling ger ekvationerna

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial b} = 2(0.4 + 4b), \quad 0 = \frac{\partial Q}{\partial c} = 2(-4.2 + 4c).$$

Härav erhålls att $b = -0.1$ och $c = 1.05$ minimerar $Q(b, c)$. Därmed ges de sökta maximum-likelihoodskattningarna av b och c av -0.1 respektive 1.05 . (Detta är också minsta-kvadratskattningarna av b och c .)

Uppgift 4

Eftersom punkten P tas på måfå i enhetskvadraten så gäller att

$$p = P(A) = P(Y < g(X)) = \int_0^1 g(x)dx.$$

Rita figur och tänk på tolkningen av integralen som en area!

Eftersom den 100 upprepningarna är oberoende av varandra så blir 36 observation av $\text{Bin}(100, p)$. Därmed ges konfidensintervallet för p av

$$\frac{36}{100} \pm 1.96 \sqrt{\frac{36}{100} \left(1 - \frac{36}{100}\right) \frac{1}{100}} = 0.36 \pm 0.10 = (0.26, 0.46).$$

Uppgift 5

a) Eftersom X_0 och U_1 är oberoende och normala så fås $X_1 \in N(0, \sqrt{(4/3)/4 + 1}) = N(0, \sqrt{4/3})$. Alltså har X_0 och X_1 samma fördelning. Argumentet upprepas för X_1, X_2 etc.

b) X_n och X_{n-1} kan uttryckas linjärt i de oberoende normalvariablerna $X_0, U_1, \dots, U_n$. Därav följer att (X_n, X_{n-1}) är tvådimensionellt normalfördelat. Enligt a) är $E(X_n) = E(X_{n-1}) = 0$ och $V(X_n) = V(X_{n-1}) = 4/3$. Eftersom X_{n-1} är oberoende av U_n så

$$C(X_n, X_{n-1}) = C(X_{n-1}/2 + U_n, X_{n-1}) = C(X_{n-1}, X_{n-1})/2 + C(U_n, X_{n-1}) = \frac{4}{6} + 0 = \frac{2}{3}.$$

Därmed är alla parametrar i fördelningen preciserade.

Uppgift 6

Genom att använda $x_{in}(t) = e^{i\omega t}$ ser man att det linjära filtrets frekvenssvarsfunktion blir

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{2u} e^{i\omega(-u)} du + \int_0^{\infty} e^{-2u} e^{i\omega(-u)} du = 1/(2-i\omega) + 1/(2+i\omega) = 4/(4+\omega^2).$$

Ur detta och filtersatsen fås att utsignalen till det vita bruset har variansen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4^2}{(4+\omega^2)^2} 3 d\omega = \frac{3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{3}{2}.$$