



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI
TISDAGEN DEN 15 JANUARI 2008 KL 08.00–13.00.

Examinator: Gunnar Englund, tel. 7907416, e-postadress: gunnare@math.kth.se

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i matematisk statistik grundkurs för D2 och F2, formelblad i tillförlitlighetsteori. Miniräknare.

Resultatet rapporteras till Ladok senast tisdagen den 5 februari 2008 och finns därefter tillgängligt via "Mina sidor". Den som vill få sitt resultat meddelat via e-post, kan skicka ett e-brev till gunnare@math.kth.se med begäran om detta.

Införda beteckningar skall definieras. Resonemang och genomförande av uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet.

Gränsen för godkänt är 24 poäng. Komplettering till godkänt betyg medges för de med 22–23 poäng.

Uppgift 1

En Markovkedja $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ på $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ har övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Angiv de slutna irreducibla delklasserna. Klassificera tillstånden och avgör om kedjan är ergo-disk. (3 p)

b) Kedjan startar med fördelningen $\mathbf{p}^{(0)} = (0.1, 0.2, 0, 0.3, 0, 0.4)$. Undersök om gränsvärdena $\alpha_i = P(X_n = i)$, $i = 1, 2, \dots, 6$ existerar och beräkna i så fall dessa. (7 p)

Uppgift 2

Ett företag ville uppskatta tillförlitligheten hos en produkt som det tillverkar. Därför undersökte man hur 100 av deras produkter fungerat under garantitiden som var ett år. 92 av dem hade fungerat under hela garantitiden men de återstående 8 hade brustit efter 21, 36, 164, 176, 198, 253, 259 respektive 304 dagar. Felintensiteten antas vara konstant.

a) Beräkna en lämplig skattning av förväntad livslängd. (4 p)

b) Ge ett approximativt 95 % konfidensintervall för sannolikheten att produkten fungerar garanti-tiden ut, dvs ett år. (6 p)

Uppgift 3

I ett system med komponenterna $\{1, 2, 3, 4\}$ är de minimala vägarna $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ och $\{2, 3, 4\}$.

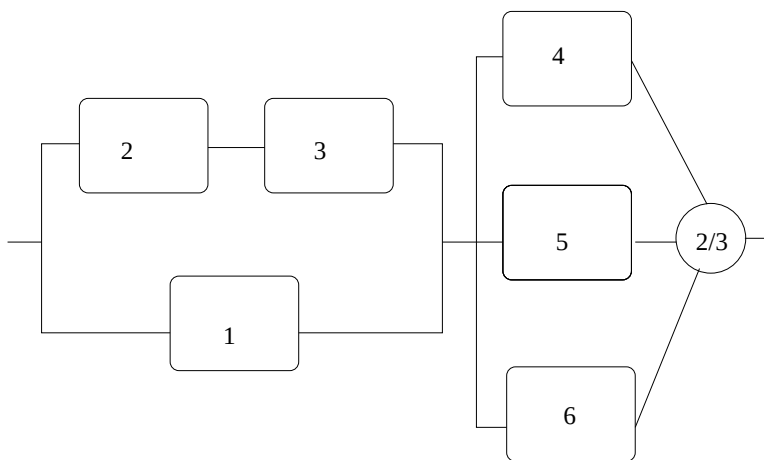
- a) Bestäm de minimala brotten. (4 p)
- b) Komponenterna har funktionssannolikheterna $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.95$, $p_3 = 0.97$ samt $p_4 = 0.99$. Bestäm (bra) övre och undre gänser för funktionssannolikheten för systemet om komponenterna är associerade. (6 p)

Uppgift 4

Moderna bilar har två oberoende (fot-)bromssystem. Om bromstrycket försvinner för ett system, dvs bromsverkan för detta bortfaller, så visar en varningslampa rött. Anta att detta inträffar med intensitet λ per h (h =timmar körtid) för vart och ett av systemen. Föraren antas då försiktigt ta bilen till närmaste verkstad, där båda bromssystemen inspekteras och repareras till fullgott skick. Körtiden till verkstad antas exponentialfördelad med väntevärde $1/\alpha$ (enhet h). Varningslampan kan också gå sönder, vilket gör att föraren inte får någon förvarning om att ett bromssystem brustit. Felintensiteten för varninglampan är μ per h . Bortse från (i verkligheten viktiga) åldringsfenomen. Bestäm förväntad tid tills föraren kommer att köra bilen utan något fungerande bromssystem. (10 p)

Uppgift 5

Beräkna Vesely-Fussells tillförlitlighetsmått I^{VF} för komponent 1 vid tidpunkten 100 timmar i nedanstående system. Felintensiteterna är för alla komponenter $\lambda = 10^{-3} h^{-1}$ och de fungerar oberoende av varandra. (10 p)



Uppgift 6

I ett system finns 20 komponenter. Går en komponent sönder byts den genast ut mot en ny. Livslängden i timmar av en komponent har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{x}{100^2} e^{-x/100} \text{ för } x \geq 0.$$

och komponenterna fungerar oberoende av varandra. I lager och från början i systemet finns totalt 900 komponenter. Vad är approximativt sannolikheten att lagret inte räcker för minst ett års drift av systemet. (10 p)

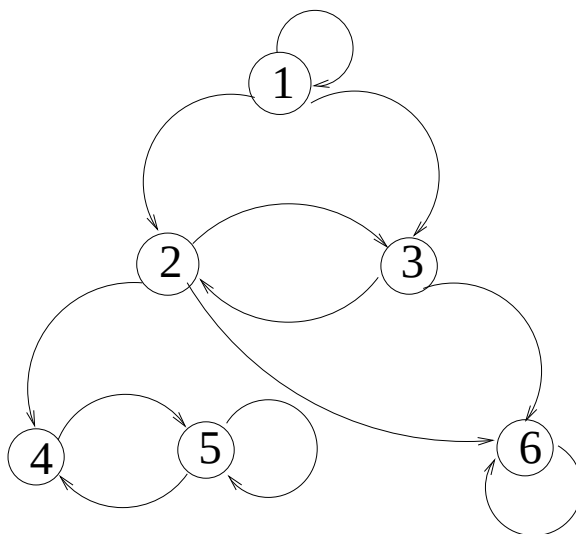
Räknehjälp: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

LÖSNINGFÖRSLAG TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI
2008-01-15

Uppgift 1

a)

Vi får övergångsgrafnen



och ur denna ser man att tillstånden 1,2 och 3 är genomgångstillstånd. $\{4,5\}$ är en sluten irreducibel delklass. 6 är ett absorberande tillstånd och utgör alltså också en sluten irreducibel delklass. Tillstånden 1,4,5,6 har perioden 1 och tillstånd 2 och 3 har perioden 2. Eftersom kedjan har två slutna irreducibla delklasser är den inte ergodisk.

b) Uppträdandet efter lång tid är att kedjan antingen hamnar i 6:an eller i den slutna irreducibla delklassen $\{4,5\}$. I denna delklass har vi övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

och den utgör alltså en ergodisk delklass eftersom den är ändlig, irreducibel ($4 \rightarrow 5 \rightarrow 4$) och aperiodisk ty $p_{55} = 0.5 > 0$. Vi har på denna delklass den asymptotiska fördelningen som ges av $(\pi_4, \pi_5) = (\pi_4, \pi_5)P$ och $\pi_4 + \pi_5 = 1$. Detta ger $\pi_4 = 1/3$ och $\pi_5 = 2/3$. Detta visar att α_i :na existerar och vi har $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. För att erhålla de övriga beräknar vi sannolikheten att absorberas i tillstånd 6 och låter q_i = sannolikheten att absorberas i 6:an givet start i tillstånd i . Vi erhåller alltså $q_4 = q_5 = 0$ och $q_6 = 1$. Återstår att få fram q_1, q_2 och q_3 och vi får $q_1 = 0 + 0.2q_1 + 0.4q_2 + 0.4q_3$. Vidare $q_2 = 0.3 + 0.4q_3$ samt $q_3 = 0.5 + 0.5q_2$. Sätts uttrycket för q_3 in i uttrycket för q_2 erhålls $q_2 = 5/8$ som ger $q_3 = 13/16$ och dessa ger $q_1 = 23/32$.

Eftersom vi startar med fördelningen $\mathbf{p}^{(0)}$ ser vi att sannolikheten att hamna i 6:an efter lång tid är

$$\alpha_6 = P(\text{absorberas i 6:an}) = \sum_1^6 P(\text{abs i 6:an} | \text{start i } i) P(\text{start i } i) =$$

$$= 0.1q_1 + 0.2q_2 + 0q_3 + 0.3q_4 + 0q_5 + 0.4q_6 = 0.1 \cdot \frac{23}{32} + 0.2 \cdot \frac{5}{8} + 0.4 = 191/320 \approx 0.5969.$$

Alltså är sannolikheten $1 - 191/320 = 129/320$ att hamna i delklassen $\{4, 5\}$ när vi startar med fördelningen $\mathbf{p}^{(0)}$. När man väl hamnat i den delklassen är sannolikheten att ligga i 4 respektive 5 efter lång tid π_4 respektive π_5 eftersom delkedjan på $\{4, 5\}$ var ergodisk. Vi får alltså

$$\alpha_4 = \pi_4 \cdot \frac{129}{320} = \frac{1}{3} \cdot \frac{129}{320} = \frac{43}{320} \approx 0.1344$$

och

$$\alpha_5 = \pi_5 \cdot \frac{129}{320} = \frac{2}{3} \cdot \frac{129}{320} = \frac{86}{320} \approx 0.2688.$$

Svar: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 \approx 0.1344$, $\alpha_5 \approx 0.2688$, $\alpha_6 \approx 0.5969$

Uppgift 2

a) Det är uppenbart fråga om censurerat stickprov Typ I (fixerad tid). ML-skattningen är $m^* = T/r$ där T är total testtid och r antalet komponenter som brustit. Vi får att $T = 21 + 36 + \dots + 304 + 92 \cdot 365 = 34991$ och $r = 8$. Härav $m^* = 4374$.

b) Vi beräknar först ett approximativt 95 % konfidensintervall för felintensiteten λ . Den blir på sedvanligt sätt

$$\left(\frac{\chi_{0.975}^2(2r)}{2T}, \frac{\chi_{0.025}^2(2r)}{2T} \right) = \left(\frac{\chi_{0.975}^2(16)}{2 \cdot 34991}, \frac{\chi_{0.025}^2(16)}{2 \cdot 34991} \right) = \left(\frac{6.91}{69982}, \frac{28.8}{69982} \right) = (0.0000987, 0.0004115).$$

Sannolikheten att produkten fungerar minst ett år är $e^{-\lambda \cdot 365}$ varför ett 95 % konfidensintervall ges av

$$(e^{-0.0004115 \cdot 365}, e^{-0.0000987 \cdot 365}) = \underline{(0.8605, 0.9646)}$$

Uppgift 3

a) Man får brott genom att välja minst en komponent från varje minimal väg, vilket man kan inse genom att se strukturen som uppbyggd av parallellkoppling av de minimala vägarna. Därefter ser man till att välja brotten så att de är minimala. Vi får alltså de minimala brotten $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ och $\{2, 3\}$.

b) Vi får $\prod_{i \in S_j} p_i$ för de tre minimala vägarna till

$$p_1 p_2 = 0.9 \cdot 0.95 = 0.8550,$$

$$p_1 p_3 = 0.9 \cdot 0.97 = 0.8730 \text{ och}$$

$$p_2 p_3 p_4 = 0.95 \cdot 0.97 \cdot 0.99 = 0.9123.$$

Vi får $\prod_{i \in K_j} p_i$ för de fyra minimala brotten till

$$p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0.9 + 0.95 - 0.9 \cdot 0.95 = 0.9950,$$

$$p_1 + p_3 - p_1 p_3 = 0.9 + 0.97 - 0.9 \cdot 0.97 = 0.9970,$$

$$p_1 + p_4 - p_1 p_4 = 0.9 + 0.99 - 0.9 \cdot 0.99 = 0.9990 \text{ och}$$

$p_2 + p_3 - p_2 p_3 = 0.95 + 0.97 - 0.95 \cdot 0.97 = 0.9985$,
vilket ger gränserna $0.9123 \leq P(\text{systemfunktion}) \leq 0.9950$.

Uppgift 4

Markovmodell! Inför tillstånden

E_0 =Bromssystemen OK, lampa OK,
 E_1 =Bromssystemen OK, lampa trasig,
 E_2 =Ett bromssystem trasigt, upptäckt
 E_3 =Ett bromssystem trasigt, oupptäckt
 E_4 =Båda bromssystemen trasiga

Vi får intensitetsmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} -(2\lambda + \mu) & \mu & 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 & 2\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & -(\lambda + \alpha) & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Låt t_i =förväntad tid till absorbtion i E_4 vid start i E_i . Vi får

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2\lambda + \mu} + \frac{\mu}{2\lambda + \mu} t_1 + \frac{2\lambda}{2\lambda + \mu} t_2 \\ t_1 &= \frac{1}{2\lambda} + t_3 \\ t_2 &= \frac{1}{\lambda + \alpha} + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} t_0 \\ t_3 &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Vi söker t_0 och erhåller eftersom $t_1 = 3/2\lambda$

$$t_0 = \frac{1}{2\lambda + \mu} + \frac{\mu}{2\lambda + \mu} \cdot \frac{3}{2\lambda} + \frac{2\lambda}{2\lambda + \mu} \left(\frac{1}{\lambda + \alpha} + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} t_0 \right)$$

som ger

$$t_0 = \frac{4\lambda^2 + 2\lambda\alpha + 3\mu\lambda + 3\mu\alpha}{2\lambda(2\lambda + \mu)}$$

Uppgift 5

Minimala brott: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 6\}$ och $\{5, 6\}$. Det ger strukturfunktion i grundform $\Phi(\underline{x}) = (x_1 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3)(x_4 x_5 + x_4 x_6 + x_5 x_6 - 2x_4 x_5 x_6)$. Systemsannolikheten får genom att ersätta alla x_i med $R(t) = e^{-\lambda t}$,

$$R_S(t) = (R(t) + R(t)^2 - R(t)^3)(3R(t)^2 - 2R(t)^3).$$

Sannolikheten att alla komponenter felar i ett minimalt brott där 1 ingår är

$$\begin{aligned} P(\{1, 2 \text{ felar}\} \cup \{1, 3 \text{ felar}\}) &= P(1 \text{ felar})P(2 \text{ eller } 3 \text{ felar}) = \\ &P(1 \text{ felar})(1 - P(2 \text{ och } 3 \text{ hela})) = (1 - R(t))(1 - R(t)^2). \end{aligned}$$

Detta ger

$$I^{VF}(1) = \frac{(1 - R(t))(1 - R(t)^2)}{1 - R_S(t)}$$

Med $R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-10^{-3} \cdot 100} = e^{-0.1}$ fås $I^{VF}(1) = 0.4082$

Uppgift 6

Låt m och σ^2 vara väntevärdet respektive variansen för livslängden T för en komponent. Vi får

$$m = E(T) = \frac{1}{100^2} \int_0^\infty x^2 e^{-x/100} dx = (\text{gör subst. } x/100 = t) = 100 \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = 200$$

och

$$E(T^2) = \frac{1}{100^2} \int_0^\infty x^3 e^{-x/100} dx = 100^2 \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = 60000$$

som ger $\sigma^2 = E(T^2) - (E(T))^2 = 60000 - 200^2 = 20000$.

Vi tänker oss att komponenterna är placerade på 20 platser. Låt antalet utbyten på plats i under t tidsenheter vara $N_i(t)$. Då är enligt förnyelseteorin $N_i(t)$ approximativt (där $t=1$ år=8760 h) $N(t/m, \sqrt{t\sigma^2/m^3}) \approx N(43.8, \sqrt{21.9})$.

Med Y =antalet utbyten som krävs under 1 år är $Y = N_1(8760) + \dots + N_{20}(8760)$ och vi ser att Y är approximativt $N(20 \cdot 43.8, \sqrt{20 \cdot 21.9}) \approx N(876, \sqrt{438})$. Vi får

$$P(Y > 900) \approx 1 - \Phi\left(\frac{900 - 876}{\sqrt{438}}\right) \approx 1 - \Phi(1.15) \approx \underline{0.13}.$$