



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI  
TORSDAGEN DEN 8 JANUARI 2009 KL 08.00–13.00.

*Examinator:* Gunnar Englund, tel. 7907416, e-postadress: gunnare@math.kth.se

*Tillåtna hjälpmedel:* Formel- och tabellsamling i matematisk statistik grundkurs för D2 och F2, formelblad i tillförlitlighetsteori. Miniräknare.

Resultatet rapporteras till Ladok senast torsdagen den 29 januari 2009 och finns därefter tillgängligt via "Mina sidor". Den som vill få sitt resultat meddelat via e-post, kan skicka ett e-brev till gunnare@math.kth.se med begäran om detta.

Införda beteckningar skall definieras. Resonemang och genomförande av uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet.

Gränsen för godkänt är 24 poäng. Komplettering till godkänt betyg medges för de med 22–23 poäng.

### Uppgift 1

En standardkomponent består av en seriekoppling av två delkomponenter som var och en har felintensitet  $\lambda$  och fungerar oberoende av varandra. För att skatta  $\lambda$  satte man 100 standardkomponenter under provning (utan återläggning) och avsåg att avbryta provningen när 15 av dem brustit. De 15 komponenterna brast vid tidpunkterna

0.1 3.4 3.5 6.7 7.8 13.6 14.2 16.7 20 20.7 23.2 27.2 27.8 27.9 31.1

Summan av observationerna ovan är 243.9.

- a) Ge ett 95 % konfidensintervall för  $\lambda$ . (5 p)
- b) Anta att man fortsätter provningen. Ge i så fall ett 95 % konfidensintervall för den förväntade tiden tills den 16:e standardkomponenten brustit, dvs tiden mellan det 15:e och 16:e brottet. (5 p)

### Uppgift 2

Ett system består av två parallellkopplade komponenter  $A$  och  $B$  som båda har felintensitet  $\lambda$ . Då en av komponenterna går sönder tillkallas en reparatör. Tiden tills reparatören kommer på plats är exponentialfördelad med väntevärde  $1/\nu$  och därefter är reparationsintensiteten  $\mu$ . Om ytterligare en komponent går sönder medan han håller på med en reparation, påbörjar han omedelbart reparation av den andra då den första färdigreparerats.  $\lambda = 10^{-3}$ ,  $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$  och  $\nu = 20 \cdot 10^{-3}(h^{-1})$

Bestäm asymptotisk tillgänglighet. (1 p)0

### Uppgift 3

Osquar utför en slumpvandring på en (oändligt lång) bro byggd av sex parallella plankor i brons längdriktning. För varje steg framåt flyttar han sig dessutom 1 plankor åt höger, 1 plankor åt vänster eller fortsätter på samma plankor med sannolikhet  $1/3$  vardera. Bron är lyckligtvis utrustad med

skyddsräcken så att då Osquar befinner sig på en ytterplanka och försöker fortsätta utåt studsas han tillbaka till den näst yttersta plankan.

a) Inför en lämplig modell och visa att det finns en asymptotisk fördelning för vilken plankan Osquar befinner sig på efter lång tid, samt beräkna hur stor andel av tiden Osquar befinner sig vid någon av ytterplankorna (i jämviktstillståndet). (5 p)

b) Osquar startar på någon av mittenplankorna. Beräkna förväntat antal steg innan han för första gången stöter i skyddsräcket. (5 p)

#### Uppgift 4

I ett system ingår en komponent vars livslängd  $X$  (år) har täthetsfunktionen

$$f(t) = \frac{15}{(5t+1)^4}, \quad t \geq 0.$$

a) Visa att fördelningen har avtagande felintensitet och är NWU (New Worse than Used) dvs att

$$P(X > x + y \mid X > x) \geq P(X > y), \quad x, y \geq 0.$$

(3 p)

b) Då komponenten brister byts den ut mot en ny likadan (utbytestiden är försumbar). Kostnaden för ett byte är 200 kr. Beräkna approximativt väntevärde och standardavvikelse för byteskostnaden under 5 år. (4 p)

c) Beräkna sannolikheten att totala utbyteskostnaden under 5 år överstiger 12000 kr. (3 p)

#### Uppgift 5

Vi har 5 stycken identiska enheter som oberoende av varandra fungerar (med sannolikhet  $\theta$ ) eller inte fungerar (med sannolikhet  $1 - \theta$ ).

$\theta$  är ett utfall av en stokastisk variabel  $\Theta$  som har a-priori-tätheten

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 2\theta & \text{om } 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

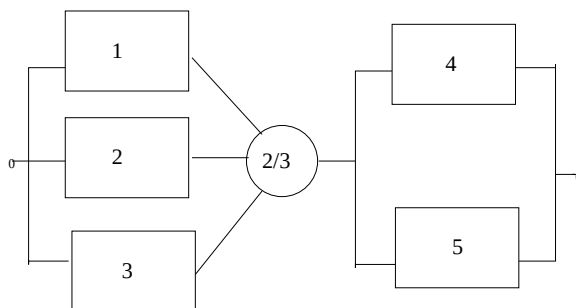
Beräkna a-posteriori-fördelningen för  $\Theta$  om vi observerar att precis 2 av de 5 enheterna fungerar. (1 p)

Ledning: Det gäller att  $\int_0^1 t^m (1-t)^n dt = \frac{m! n!}{(n+m+1)!}$

#### Uppgift 6

a) Beräkna Vesely-Fussells tillförlitlighetsmått för komponent 1 i nedanstående system. Funktions-sannolikheterna är

$$p_1 = 0.2, p_2 = 0.6, p_3 = 0.8, p_4 = 0.5 \text{ och } p_5 = 0.9$$



(5 p)

b) Birnbaums tillförlitlighetsmått definieras ju som den partiella derivatan  $I^B(i) = \frac{\delta h(\underline{p})}{\delta p_i}$ . Visa att för ett system av oberoende komponenter  $I^B(i) = h(1_i, \underline{p}) - h(0_i, \underline{p})$ , där  $h(1_i, \underline{p})$  och  $h(0_i, \underline{p})$  är funktionssannolikheterna för systemet med komponent  $i$  utbytt mot säker förbindelse respektive brott.

(5 p)

LÖSNINGFÖRSLAG TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI  
2009-01-08

## Uppgift 1

a) Standardkomponenterna har felintensitet  $2\lambda$ . Ett konfidenintervall för denna intensitet fås av  $(\frac{\chi_{0.025}(2 \cdot 15)}{2T}, \frac{\chi_{0.975}(2 \cdot 15)}{2T})$  där  $T$  är total testtid. Denna är  $T = 243.9 + 85 \cdot 31.1 = 2887.4$ . Med hjälp av tabell erhåller vi så intervallet  $(2.91, 8.14)10^{-3}$ . Ett 95 % konfidensintervall för  $\lambda$  fås då som  $(1.45, 4.07)10^{-3}$ .

b) Efter 15 brottet befinner sig 85 komponenter under provning. Tiden tills den första av dessa brister är  $\text{Exp}(1/(85 \cdot 2\lambda))$ . Ett konfidensintervall för  $1/(85 \cdot 2\lambda)$  erhålls som  $(1/(85 \cdot 2 \cdot 4.07 \cdot 10^{-3}), 1/(85 \cdot 2 \cdot 1.45 \cdot 10^{-3}))$  vilket ger intervallet  $(1.45, 4.06)$ .

## Uppgift 2

Markovmodell! Inför tillstånden:

$E_0$  = båda komponenterna fungerar

$E_1$  = en fungerar, väntan på reparatör

$E_2$  = en fungerar, reparation pågår

$E_3$  = ingen fungerar, väntan på reparatör

$E_4$  = ingen fungerar, reparation pågår

Vi har intensitetsmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\nu + \lambda) & \nu & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -(\mu + \lambda) & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & \nu \\ 0 & 0 & \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix} = 10^{-3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 20 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & -11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Asymptotisk fördelning uppfyller  $\pi Q = \mathbf{0}$  vilket ger

$$\begin{cases} 0 = -2\pi_0 + 10\pi_2 \\ 0 = 2\pi_0 - 21\pi_1 \\ 0 = 20\pi_1 - 11\pi_2 + 10\pi_4 \\ 0 = \pi_1 - 20\pi_3 \\ 0 = \pi_2 + 20\pi_3 - 10\pi_4 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \end{cases}$$

som ger

$$\pi_2 = \frac{\pi_0}{5}, \pi_1 = \frac{2\pi_0}{21}, \pi_3 = \frac{\pi_1}{20} = \frac{\pi_0}{210}, \pi_4 = \frac{\pi_2}{10} + 2\pi_3 = \pi_0 \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{105} \right)$$

Insatt i normeringsekvationen ger detta

$$\pi_0 \left( 1 + \frac{2}{21} + \frac{1}{5} + \frac{1}{210} + \frac{1}{50} + \frac{1}{105} \right) = 1$$

dvs  $\pi_0 \approx 0.7521$  som i sin tur ger  $\pi \approx (0.7521, 0.0716, 0.1504, 0.0036, 0.0222)$  och eftersom systemet fungerar i tillstånden  $E_0, E_1, E_2$  blir asymptotiska tillgängligheten  $A(\infty) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \approx \underline{0.9742}$

### Uppgift 3

Vi låter  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  och  $X_n$  = Osquars läge efter  $n$  steg,  $n = 0, 1, 2, \dots$  där 1 och 6 är de två ytterplankorna. Då utgör  $(X_n; n = 0, 1, 2, \dots)$  en Markovkedja i diskret tid. Av symmetriskäl kan vi låta  $E = \{1, 2, 3\}$  där 1 är ytterplankan och kedjan får då övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Denna kedja är irreducibel ty  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  och aperiodisk (ty  $p_{11} > 0$  t ex) och alltså är den ergodisk eftersom den är ändlig. Alltså existerar en unik asymptotisk fördelning  $\underline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  oavsett starttillstånd och  $\underline{\pi}$  löser ekvationssystemet  $\underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot P$  samt  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ . Vi får alltså

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 \end{aligned}$$

Första ekvationen ger  $\pi_2 = 2\pi_1$  och tredje ekvationen ger  $\pi_2 = \pi_3$  och detta insatt i normerings-ekvationen ger  $1 = \pi_1(1 + 2 + 2)$  dvs  $\pi_1 = 1/5$ ,  $\pi_2 = \pi_3 = 2/5$ . Andelen av tiden som Osquar befinner sig på ytterplankan är  $\underline{\pi}_1 = 1/5$ .

b) Tillfoga ett absorberande tillstånd 0 som innebär krock med skyddsräcket. Vi får då en A-kedja med  $A = \{0\}$  och  $G = \{1, 2, 3\}$  och övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

I enlighet med formelsamlingen inför vi  $t_i = E(\text{tid till absorption} \mid \text{start i tillstånd } i)$  och där vi söker  $t_3$ . Vi har då  $t_i = 1 + \sum_{j \in G} p_{ij}t_j$  vilket ger

$$\begin{aligned} t_3 &= 1 + \frac{1}{3}t_2 + \frac{2}{3}t_3 \\ t_2 &= 1 + \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3 \\ t_1 &= 1 + \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 \end{aligned}$$

Första ekvationen ger  $t_2 = t_3 - 3$  och 3:e ekvationen ger  $2t_1 = 3 + t_2 = 3 + (t_3 - 3) = t_3$ . Andra ekvationen ger  $2t_2 = 3 + t_1 + t_3$  och om vi sätter in de tidigare resultaten får vi  $2(t_3 - 3) = 3 + \frac{1}{2}t_3 + t_3$  som ger  $t_3 = \underline{18}$ .

### Uppgift 4

a) Man får att fördelningsfunktionen blir

$$F(t) = \int_0^t \frac{15}{(5t+1)^4} = 15 \left[ \frac{(5t+1)^{-3}}{-3 \cdot 5} \right]_0^t = 1 - \frac{1}{(5t+1)^3}$$

och härav fås att

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{15}{(5t+1)}$$

vilken uppenbarligen är avtagande i  $t$ . Vidare inses att

$$\frac{P(X > x+y)}{P(X > x)P(X > y)} = \left( \frac{(5x+1)(5y+1)}{5(x+y)+1} \right) = \left( \frac{5x+5y+1+25xy}{5x+5y+1} \right) > 1, \quad \text{för } x, y > 0$$

vilket ger att livslängdsfördelningen är NWU.

b) Sätt  $N(t)$  = antalet byten fram till tiden  $t$ . ( $N(t); t \geq 0$ ) är en förnyelseprocess med  $E(N(5)) \approx 5/m$  där

$$\begin{aligned} m = E(X) &= \int_0^\infty \frac{15t}{(5t+1)^4} dt = \int_0^\infty \frac{3(5t+1)-3}{(5t+1)^4} dt = 3 \int_0^\infty \frac{1}{(5t+1)^3} dt - 3 \int_0^\infty \frac{1}{(5t+1)^4} dt = \\ &= 3 \left[ \frac{(5t+1)^{-2}}{-2 \cdot 5} \right]_0^\infty - 3 \left[ \frac{(5t+1)^{-3}}{-3 \cdot 5} \right]_0^\infty = \frac{3}{10} - \frac{3}{15} = 0.1 \end{aligned}$$

Alltså är  $E(N(t)) \approx 50$ . Sätt  $Y$  = kostnaden =  $200N(t)$ . Då är  $E(Y) \approx \underline{10000}$  kr.

$V(N(t)) \approx \frac{V(X) \cdot 5}{m^3}$  och

$$E(X^2) = \int_0^\infty 2tR(t)dt = \int_0^\infty 2t(1-F(t))dt = \int_0^\infty \frac{2t}{(5t+1)^3} dt = (\text{som ovan}) = 0.04$$

vilket ger  $V(X) = 0.04 - 0.1^2 = 0.03$  och alltså är  $V(N(5)) \approx 0.03 \cdot 5 \cdot 1000 = 150$  och  $D(Y) \approx 200 \cdot D(N(5)) \approx 200\sqrt{150} \approx \underline{2449.5}$  kr.

c)  $Y$  är approximativt  $N(10000, 2449.5)$  och således får vi

$$P(Y > 12000) = P\left(\frac{Y - 10000}{2449.5} > \frac{12000 - 10000}{2449.5}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{2000}{2449.5}\right) \approx 1 - \Phi(0.816) \approx \underline{0.21}.$$

### Uppgift 5

Om  $X$  = antalet fungerande enheter så gäller att  $X|\Theta = \theta$  är  $\text{Bin}(5, \theta)$  dvs att

$$P(X = x|\Theta = \theta) = \binom{5}{x} \theta^x (1-\theta)^{5-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Vi söker den betingade fördelningen för  $\Theta|X = 2$  och får

$$f_{\Theta|X=2}(\theta) = \frac{f_{\Theta}(\theta)P(X=2|\Theta=\theta)}{P(X=2)} = \frac{2p \binom{5}{2} \theta^2 (1-\theta)^3}{P(X=2)} \propto \theta^3 (1-\theta)^3$$

Eftersom enligt ledningen  $\int_0^1 \theta^3 (1-\theta)^3 d\theta = (3!3!)/7! = 1/140$  så gäller alltså att

$$f_{\Theta|X=2}(\Theta) = 140\theta^3(1-\theta)^3, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Denna fördelning kallas för övrigt  $\text{Beta}(4, 4)$ -fördelningen - se avsnittet 17.2 i Beta.

### Uppgift 6

a) De minimala brott där 1 ingår är  $\{1,2\}$  och  $\{1,3\}$ . Sannolikheten att komponenterna i något av dessa brott felar är  $P(1 \text{ felar})P(2 \text{ eller } 3 \text{ felar}) = q_1(q_2 + q_3 - q_2q_3) = 0.416$  där  $q_i = 1 - p_i$  är sannolikheten att komponent  $i$  felar. Sannolikheten att systemet felar är

$P(2 \text{ av } 3 \text{ kopplingen felar eller } 4 \text{ och } 5 \text{ felar}) =$

$P(2 \text{ av } 3 \text{ kopplingen felar}) + P(4 \text{ och } 5 \text{ felar}) - P(2 \text{ av } 3 \text{ kopplingen felar})P(4 \text{ och } 5 \text{ felar}) =$

$(q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 - 2q_1q_2q_3) + q_4q_5 - (q_1q_2 + q_1q_3 + q_2q_3 - 2q_1q_2q_3)q_4q_5 = 0.4604.$

Vi erhåller således  $I^{VF}(1) = \frac{0.416}{0.4604} = \underline{0.904}$

b) Se kursboken sida 199.