



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI
TORSDAGEN DEN 14 JANUARI 2010 KL 08.00–13.00.

Examinator: Gunnar Englund, tel. 7907416, e-postadress: gunnare@math.kth.se

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i matematisk statistik grundkurs för D2 och F2, formelblad i tillförlitlighetsteori. Miniräknare.

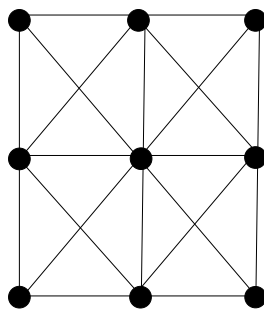
Resultatet rapporteras till Ladok senast torsdagen den 4 februari 2010 och finns därefter tillgängligt via "Mina sidor". Den som vill få sitt resultat meddelat via e-post, kan skicka ett e-brev till gunnare@math.kth.se med begäran om detta.

Införda beteckningar skall definieras. Resonemang och genomförande av uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet.

Gränsen för godkänt är 24 poäng. Komplettering till godkänt betyg medges för de med 22–23 poäng.

Uppgift 1

En partikel placeras ut i mittpunkten i nedanstående figur. Den utför sedan en slumpvandring så att vid varje steg var och en av de angränsande punkterna (till höger, vänster, uppåt, nedåt eller diagonalt) väljes med lika stor sannolikhet. Detta betyder att partikeln aldrig stannar kvar i en punkt.



- Bestäm sannolikheten att partikeln befinner sig i mitten efter lång tid och motivera också existensen av en asymptotisk fördelning. (5 p)
- Beräkna förväntat antal steg innan partikeln åter är i mitten. (5 p)

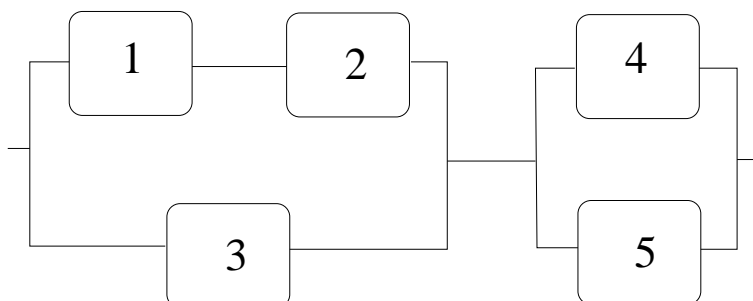
Uppgift 2

a) Tio komponenter sätts i provning och provningen avbryts då tre av dem brustit. De brustna komponenterna ersattes ej och de brast vid tidpunkterna 984, 1365 och 2850 timmar. Komponenterna antogs ha en konstant felintensitet λ . Beräkna ett 90% konfidensintervall för λ . (5 p)

b) Vid vissa provningar kan man inte observera vid vilka tidpunkter komponenterna brister utan enbart konstatera hur många som brustit vid provningens slut. Antag att tio komponenter sätts under provning och att man efter 3000 timmar konstaterar att tre av dem brustit. Komponenterna antas ha konstant felintensitet λ . Beräkna maximum-likelihood-skattningen av λ genom att betrakta den stokastiska variabeln X , antal komponenter som brister inom 3000 timmar. (5 p)

Uppgift 3

a) I följande system



fungerar komponenterna oberoende av varandra och komponenterna 1, 2 och 3 har den konstanta felintensiteten 10^{-4} , medan komponenterna 4 och 5 har felintensiteten $3 \cdot 10^{-5} \sqrt{t}$ (per timme, h^{-1}). Efter 1000 timmar brister systemet. Beräkna en lämplig felsökningsordning. (5 p)

b) Betrakta ett godtyckligt system om n oberoende komponenter. Komponent 1 har vid en viss tidpunkt funktionssannolikheten $p_1 = 0.8$ och Birnbaums tillförlitlighetsmått för komponenten är $I^B(1) = 0.87$.

En redundans sätts in vid komponent 1 genom att den ersätts med en parallellkoppling av två komponenter, som fungerar oberoende av varandra och båda med sannolikheten $p_1 = 0.8$. Beräkna Birnbaums tillförlitlighetsmått för var och en av dessa komponenter. (5 p)

Uppgift 4

Två identiska pumpar finns i ett parallellsystem. När en pump är trasig är den andra mer belastad. Pumparna har konstanta felintensiteter: $\lambda_H = 1,5 \cdot 10^{-4} (h^{-1})$ vardera då båda fungerar och $\lambda_F = 3,5 \cdot 10^{-4} (h^{-1})$ då bara en fungerar. Dessutom kan båda pumparna gå sönder genom en yttre belastning (common cause failure) och denna har en konstant intensitet $\lambda_f = 3 \cdot 10^{-5} (h^{-1})$ och dessa yttre "chocker" påverkar båda pumparna oavsett hur många av dem som fungerar. Reparationer tar exponentialfördelade tider med väntevärde $10 h$ och två reparationer kan pågå samtidigt.

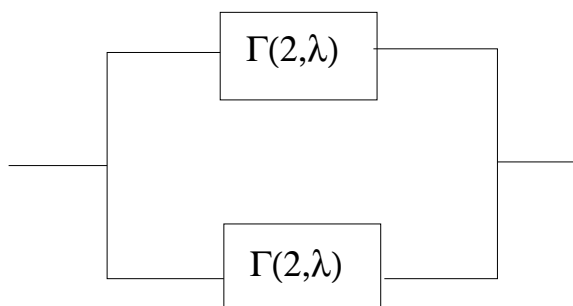
a) Beräkna asymptotiska tillgängligheten $A(\infty)$. (5 p)

b) Beräkna $MTTF$, dvs förväntad tid till första systemfel om systemet från början består av två hela pumpar. (5 p)

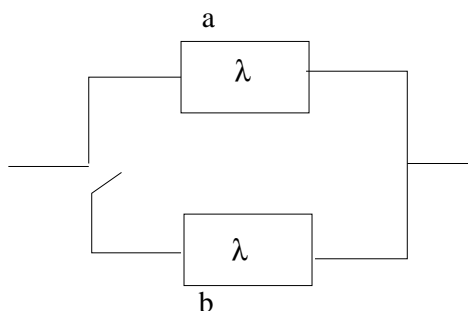
Uppgift 5

Det kan upplevas som en stor praktisk och teoretisk begränsning att man i samband med Markov-modeller måste anta att livslängder är exponentialfördelade, med det finns faktiskt möjlighet att erhålla andra livslängdsfördelningar genom att på ett listigt sätt kombinera exponentialfördelningar. Denna uppgift handlar om en sådan teknik.

I ett parallell-system enligt figuren har de ingående komponenterna $\Gamma(2, \lambda)$ -fördelade livslängder. När någon av dessa komponenter brister ersätts de med en ny likadan och utbytestiden är exponentialfördelad med väntevärde $1/\mu$. Flera parallella utbyten kan ske.



Som bekant är $\Gamma(2, \lambda)$ -fördelningen den fördelning man får om man lägger ihop två oberoende exponentialfördelade variabler som har felintensiteten λ . Detta betyder att en komponent med $\Gamma(2, \lambda)$ -fördelad livslängd kan ses som genererad av följande figur, där alltså delkomponent b kopplas in efter det att delkomponent a brustit och att delkomponent b har vilofelintensitet 0 medan belastade delkomponenter har felintensitet λ .



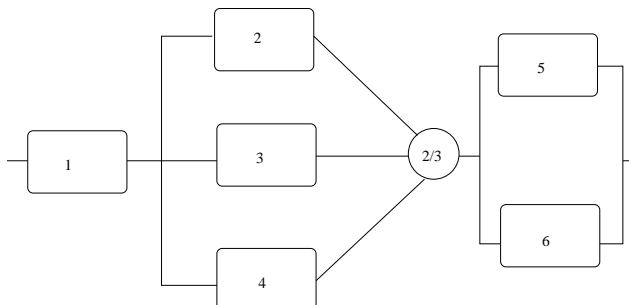
a) Ställ upp det ekvationssystem som (om det löstes) skulle ge den asymptotiska tillgängligheten $A(\infty)$ för systemet av två parallellkopplade komponenter med $\Gamma(2, \lambda)$ -fördelade livslängder. (5 p)

b) Ställ upp det ekvationssystem som (om det löstes) skulle ge förväntad tid till första systemfel om man startar systemet med två nya hela komponenter (dvs bestäm $MTTF$). (5 p)

Kommentar 1: Notera att Du ej behöver lösa ekvationssystemen utan bara ställa upp dem. De får dock ej ges i "matrisform" utan skall vara "explicit" utskrivna!

Uppgift 6

I följande system



har

Komponent 1 felintensiteten $\lambda_1(t) = 10^{-5}t$.

Komponenterna 2,3 och 4 har alla felintensiteten $\lambda = 6 \cdot 10^{-3}$.

Komponenterna 5 och 6 har Weibullfördelade livslängder vars fördelningsfunktioner båda är $F(t) = 1 - e^{-t^{1.5}/4500}$.

a) Beräkna sannolikheten att systemet fungerar vid tiden $t = 100$ om komponenterna förutsätts vara oberoende. (5 p)

b) Beräkna en undre och övre gräns för samma sannolikhet om komponenterna bara förutsätts vara associerade. (5 p)

Den som ej löst a-delen får använda sig av $p_1 = 0.7$, $p_2 = p_3 = p_4 = 0.6$ och $p_5 = p_6 = 0.8$.



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGFÖRSLAG TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI 2010-01-14

Uppgift 1

Av symmetri-skäl behövs bara 3 tillstånd: 1=mitten, 2=kant, 3=hörn. Vi får då övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

och vi startar kedjan med $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0, 0)$.

a) Kedjan är ändlig och irreducibel ty $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Den är även aperiodisk eftersom $p_{22} > 0$. Alltså är kedjan ergodisk, dvs efter lång tid har den den (unika) stationära fördelningen. Alternativt kan man motivera ergodiciteten med att kolumn nr 2 är strikt större än 0. Den efterfrågade sannolikheten är alltså π_2 där $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ uppfyller ekvationssystemet $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P$ och $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} \pi_1 &= \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

Om man tar 2-ekvation 1-ekvation 2 erhålls $\pi_1 = 2\pi_2/5$ vilket insatt i ekvation 1 ger $\pi_3 = 3\pi_2/5$. Sätts dessa resultat in i "normeringsekvationen" erhålls $\pi_2 = 5/10$ och vi får $\boldsymbol{\pi} = (2/10, 5/10, 3/10)$ och den sökta sannolikheten är alltså $2/10=0.2$.

b) Vi gör tillståndet 1 (dvs mitten) absorberande (utom när vi startar i mitten). Med beteckningar enligt formelsamlingen låter vi t_i vara förväntad tid tills absorption i mitten givet start i tillstånd i , $i=2,3$ och t_1 förväntad tid från mitten tills vi återvänder till mitten. Vi får då

$$\begin{cases} t_1 &= 1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 \\ t_2 &= 1 + \frac{2}{5}t_2 + \frac{2}{5}t_3 \\ t_3 &= 1 + \frac{2}{5}t_2 \end{cases}$$

Om vi sätter in sista ekvationen i ekvation 2 erhålls $t_2 = 4.2$ som ger $t_3 = 3.8$ som slutligen ger $t_1 = 5$.

Uppgift 2

a) Total testtid är $T = 984 + 1365 + 8 \cdot 2850 = 25149$. Ett 90% konfidensintervall ges av $(\frac{\chi_{0.95}^2(6)}{2T}, \frac{\chi_{0.05}^2(6)}{2T}) = (\frac{1.62}{50298}, \frac{12.6}{50298}) = (0.32, 2.50) \cdot 10^{-4}$.

b) Sannolikheten att en komponent brister inom 3000 timmar är $1 - e^{-3000\lambda}$ och därför är $X \in \text{Bin}(10, p)$ med $p = 1 - e^{-3000\lambda}$. Enligt ML-metoden skall vi skatta λ så att sannolikheten för observationen $x = 3$ maximeras. Men sannolikheten är $\binom{10}{3} p^3 (1-p)^7$ vilket man ser maximeras för $p = 3/10$ (relativa frekvensen), i detta fall $\hat{p} = 0.3$. Men detta inträffar om $1 - e^{-3000\lambda} = 0.3$, d.v.s. då $\lambda = \hat{\lambda} = \frac{-\ln 0.7}{3000} = \underline{1.19 \cdot 10^{-4}}$.

Uppgift 3

a) Kritisk betydelse, I^{CR} , eller Vesely-Fussells mått, I^{VF} kan användas. Vi beräknar först komponenternas funktionssannolikheter vid $t = 1000$. Vi erhåller

$$p_1 = p_2 = p_3 = e^{-10^{-4} \cdot 1000} = e^{-0.1} = 0.9048,$$

$$p_4 = p_5 = e^{-3 \cdot 10^{-5} \int_0^{1000} \sqrt{t} dt} = e^{-2 \cdot 10^{-5} \cdot 1000^{3/2}} = e^{-2\sqrt{0.1}} = 0.5313$$

Systemets strukturfunktion blir i linjär form $\Phi(\underline{x}) = (x_1 x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3)(x_4 + x_5 - x_4 x_5)$. Insättning av komponenternas funktionssannolikheter ger systemets funktionssannolikhet $h(\underline{p}) = (p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3)(p_4 + p_5 - p_4 p_5) = 0.7668$. Vi får då

$$I^B(1) = \frac{\partial h}{\partial p_1} = (p_2 - p_2 p_3)(p_4 + p_5 - p_4 p_5) \text{ och}$$

$$I^{CR}(1) = \frac{(1 - p_1) I^B(1)}{1 - h(\underline{p})} = 0.0274$$

På grund av symmetrin är också $I^{CR}(2) = 0.0274$. För komponent 3 erhålls

$$I^B(3) = \frac{\partial h}{\partial p_3} = (1 - p_1 p_2)(p_4 + p_5 - p_4 p_5) \text{ och}$$

$$I^{CR}(3) = \frac{(1 - p_3) I^B(3)}{1 - h(\underline{p})} = 0.0577$$

Komponenterna 4 och 5 har samma mått och

$$I^B(4) = \frac{\partial h}{\partial p_4} = (p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_5) = \text{och}$$

$$I^{CR}(4) = \frac{(1 - p_4) I^B(4)}{1 - h(\underline{p})} = 0.9260$$

Vi får således sökordningen $4, 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 2$

Använder man I^{VF} erhålls $I^{VF}(1) = I^{VF}(2) = 0.0388$, $I^{VF}(3) = 0.0740$ och $I^{VF}(4) = I^{VF}(5) = 0.9223$ och samma sökordning.

b) Låt $I^B(1)$ vara Birnbaums tillförlitlighetsmått för komponent 1 i det ursprungliga systemet och $I_r^B(1)$ vara Birnbaums tillförlitlighetsmått för en av de parallellkopplade komponenterna i det nya systemet. Vi visar först att $I_r^B(1) = (1 - p_1) I^B(1)$. Det kan visas på t.ex. ett av följande tre sätt:

1. $h_r(\underline{p}') = h(p_{1'} + p_{1''} - p_{1'} p_{1''}, p_2, \dots, p_n)$ där $1'$ och $1''$ är komponenterna i parallellkopplingen, $h(\underline{p})$ funktionssannolikheten i det ursprungliga systemet och $h_r(\underline{p}')$ i det redundanta. Vi får

$$I^B(1') = \frac{\partial h_r(\underline{p}')}{\partial p_{1'}} = (\text{kedjeregeln}) = (1 - p_{1'}) \frac{\partial h(\underline{p})}{\partial p_1} \Big|_{p_1 = p_{1'} + p_{1''} - p_{1'} p_{1''}} = (1 - p_{1'}) I^B(\underline{p})$$

Notera att $\frac{\partial h(\underline{p})}{\partial p_1}$ inte beror på första argumentet varför den sista likheten gäller.

2. Vi har $I^B(1) = h(1_1, \underline{p}) - h(0_1, \underline{p})$ och $I_r^B(1') = h_r(1_{1'}, \underline{p}) - h_r(0_{1'}, \underline{p})$. Men det inses lätt att $h(1_1, \underline{p}) = h_r(1_{1'}, \underline{p})$ och att $h_r(0_{1'}, \underline{p}) = h(\underline{p})$. Om t.ex. komponent 1' är defekt blir det resulterande systemet (med en av de parallellkopplade komponenterna kvar) ekvivalent med det ursprungliga. Vi får

$$\begin{aligned} I^B(1') &= h_r(1_{1'}, \underline{p}) - h_r(0_{1'}, \underline{p}) = h(1_1, \underline{p}) - h(\underline{p}) = (\text{pivotering}) \\ &= h(1_1, \underline{p}) - (p_1 h(1_1, \underline{p}) + (1 - p_1)(h(0_1, \underline{p}))) = (1 - p_1)(h(1_1, \underline{p}) - h(0_1, \underline{p})) \\ &= (1 - p_1)I^B(1) \end{aligned}$$

3. $I^B(1')$ är sannolikheten att systemet är i sådant tillstånd att 1' är kritisk för systemet. Men att 1' är kritisk innebär att 1'' är defekt (annars 1' irrelevant) och att systemet i övrigt i sådant tillstånd att det är kritiskt för 1', d.v.s. i samma slags tillstånd som det ursprungliga. Eftersom komponenterna fungerar oberoende av varandra är sannolikheten för allt detta $(1 - p_1)I^B(1)$.

Insatta siffror ger nu omedelbart $I^B(1') = 0.2 \cdot 0.87 = 0.174$

Uppgift 4

Vi har en reparationsintensitet $\mu = \frac{1}{10} = 10^{-1} = 1000 \cdot 10^{-4}$. Vi låter tillstånden vara $E_n = n$ komponenter fungerar ej och vi får då övergångsintensitetsmatrisen

$$Q = 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} -3.3 & 3 & 0.3 \\ 1000 & -1003.8 & 3.8 \\ 0 & 2000 & -2000 \end{pmatrix}$$

För att finna den stationära fördelningen $\underline{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2)$ löser vi ekvationen $\underline{0} = \underline{\pi}Q$ med bivillkoret $1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$ som ger

$$\begin{array}{rcllcl} 0 & = & -3.3\pi_0 & + & 1000\pi_1 & \\ 0 & = & 3\pi_0 & - & 1003.8\pi_1 & + & 2000\pi_2 \\ 0 & = & 0.3\pi_0 & + & 3.8\pi_1 & - & 2000\pi_2 \\ 1 & = & \pi_0 & + & \pi_1 & + & \pi_2 \end{array}$$

Första ekvationen ger $\pi_1 = \frac{3.3}{1000} \cdot \pi_0$ som insatt i 2:dra ekvationen ger

$$\pi_2 = \frac{1}{2000} \left(1003.8 \cdot \frac{3.3}{1000} - 3 \right) \pi_0$$

och dessa två ger insatt i 4:e ekvationen (normeringsekvationen)

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{3.3}{1000} + \frac{1}{2000} \left(\frac{3.3 \cdot 1003.8 - 3000}{1000} \right) \right)^{-1} \approx \frac{1}{1.00345627}$$

och vi får

$$A(\infty) = 1 - \pi_2 = 1 - \frac{1}{2000} \left(\frac{1003.8 \cdot 3.3 - 3000}{1000} \right) \cdot \pi_0 \approx 1 - 1.56 \cdot 10^{-4} = \underline{\underline{0.999844}}$$

b)

Med beteckning t_{ij} = förväntad tid till tillstånd j givet start i tillstånd i ser vi att $MTTF = t_{02}$. Vi erhåller med ett stann-tidsresonemang att $t_{02} = \frac{1}{3.3} \cdot 10^4 + \frac{3}{3.3} t_{12}$ och $t_{12} = \frac{1}{1003.8} \cdot 10^4 + \frac{1000}{1003.8} t_{02}$.

Vi får alltså att $t_{02} = \frac{1}{3.3} 10^4 + \frac{3}{3.3} \left(\frac{1}{1003.8} 10^4 + \frac{1000}{1003.8} t_{02} \right)$ som ger

$$t_{02} = 10^4 \cdot \frac{\frac{1}{3.3} + \frac{3}{3.3 \cdot 1003.8}}{1 - \frac{3000}{3.3 \cdot 1003.8}} \approx \underline{3.22 \cdot 10^4}.$$

Uppgift 5

Vi inför tillstånden

- 1='alla hela (dvs båda använder a)',
- 2='ena komponenten använder b , den andra a ',
- 3='ena komponenten repareras, den andra använder a ',
- 4='båda komponenterna använder b ',
- 5='ena komponenten repareras, den andra använder b ',
- 6='båda komponenterna repareras'.

Vi får då övergångsintensitetsmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -(\mu + \lambda) & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -(\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & -2\mu \end{pmatrix}$$

Markovprocessen är uppenbarligen irreducibel och alltså ergodisk eftersom den är ändlig. Vi får den stationära (och eftersom den var ergodisk också den asymptotiska) fördelningen $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6)$ genom att lösa ekvationssystemet $\mathbf{0} = \boldsymbol{\pi}Q$ där $\sum_1^6 \pi_i = 1$. Bara tillståndet 6 innebär systemfel och asymptotiska tillgängligheten är alltså $A(\infty) = 1 - \pi_6$. Ekvationssystemet blir

$$\begin{cases} 0 & = -2\lambda\pi_1 + \mu\pi_3 \\ 0 & = 2\lambda\pi_1 - 2\lambda\pi_2 + \mu\pi_5 \\ 0 & = \lambda\pi_2 - (\mu + \lambda)\pi_3 + 2\mu\pi_6 \\ 0 & = \lambda\pi_2 - 2\lambda\pi_4 \\ 0 & = \lambda\pi_3 + 2\lambda\pi_4 - (\mu + \lambda)\pi_5 \\ 0 & = \lambda\pi_5 - 2\mu\pi_6 \\ 1 & = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \end{cases}$$

Anm. Lösningen blir. $\boldsymbol{\pi} = [\mu^2, 2\mu^2, 2\lambda\mu, \mu^2, 2\lambda, \lambda^2]/(\lambda + 2\mu)^2$ och således $A(\infty) = (4\lambda\mu + 4\mu^2)/(\lambda + 2\mu)^2$.

b) Vi gör om tillstånd 6 till ett absorberande tillstånd. Låt t_i vara förväntad tid tills absorption i tillstånd 6 givet start i tillstånd i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Vi söker $t_1 = MTTF$.

Med stann-tidsresonemang erhålls ekvationerna

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2\lambda} + t_2 \\ t_2 = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}t_3 + \frac{1}{2}t_4 \\ t_3 = \frac{1}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}t_1 + \frac{\lambda}{\mu + \lambda}t_5 \\ t_4 = \frac{1}{2\lambda} + t_5 \\ t_5 = \frac{1}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}t_2 \end{cases}$$

och ur detta ekvationssystem skall vi alltså bestämma t_1 .

Anm. Lösningen blir $t_1 = 1/2 \cdot (4\mu^2 + 12\mu \cdot \lambda + 11 \cdot \lambda^2)/(\lambda^2(\mu + 2\lambda))$.

Uppgift 6

a) Vi betecknar funktionssannolikheterna för komponent i vid $t = 100$ med p_i

$$p_1 = \exp\left(-10^{-5} \int_0^{100} t dt\right) = e^{-0.05}, \quad p_2 = p_3 = p_4 = \exp(-6 \cdot 10^{-3} \cdot 100) = e^{-0.6},$$

$$p_5 = p_6 = \exp(-100^{1.5}/4500) = e^{-0.2222} = 0.80.$$

Systemet består av tre delar kopplade i serie. För den andra delen ('2 av 3'-delen) har vi funktionssannolikheten $p_2^3 + 3p_2^2(1 - p_2) = e^{-1.8} + 3 \cdot e^{-1.2}(1 - e^{-0.6}) \approx 0.573$. För den tredje delen har vi ett parallell-system som har funktionssannolikheten $p_5 + p_6 - p_5p_6 \approx 2e^{-0.2222} - e^{-0.4444} \approx 0.963$ vilket ger funktionssannolikheten för systemet till $e^{-0.05} \cdot 0.573 \cdot 0.963 \approx \underline{0.525}$.

b) Vi beräknar först minimala vägar och avbrott. De minimala vägarna blir

$\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}$. Detta ger (eftersom $\prod_{i \in S_j} p_i$ har samma värde pga symmetrin för alla minimala vägar) att

$$\prod_{i \in S_j} p_i = p_1 p_2 p_3 p_5 \approx e^{-1.4722} \approx 0.2295$$

utgör en undre gräns för funktionssannolikheten. Minimala avbrott blir $K_1 = \{1\}, K_2 = \{2, 3\}, K_3 = \{2, 4\}, K_4 = \{3, 4\}, K_5 = \{5, 6\}$ som ger

$$\prod_{i \in K_1} p_i = p_1 = e^{-0.05} \approx 0.9513$$

$$\prod_{i \in K_2} p_i = \prod_{i \in K_3} p_i = \prod_{i \in K_4} p_i = 1 - (1 - p_2)(1 - p_3) = p_2 + p_3 - p_2 p_3 = 2e^{-0.6} - e^{-1.2} \approx 0.796$$

$$\prod_{i \in K_5} p_i = p_5 + p_6 - p_5 p_6 = 2e^{-0.2222} - e^{-0.4444} \approx 0.96$$

varav följer att $\underline{0.2295} \leq p \leq \underline{0.796}$ där p = systemets funktionssannolikhet.