



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI
LÖRDAGEN DEN 23 OKTOBER 2010 KL 13.00–18.00.

Examinator: Gunnar Englund, tel. 7907416, e-postadress: gunnare@math.kth.se

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i matematisk statistik grundkurs för D2 och F2, formelblad i tillförlitlighetsteori. Miniräknare.

Resultatet rapporteras till Ladok senast 3 veckor efter tentamen och finns därefter tillgängligt via "Mina sidor". Den som vill få sitt resultat meddelat via e-post, kan skicka ett e-brev till gunnare@math.kth.se med begäran om detta.

Införda beteckningar skall definieras. Resonemang och genomförande av uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet.

Gränsen för godkänt är 24 poäng. Komplettering till godkänt betyg medges för de med 22–23 poäng.

Uppgift 1

En Markovkedja har tillstånden $\{1, 2, 3\}$ och övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Markovkedjan har vid tidpunkt 0 tillståndet 1.

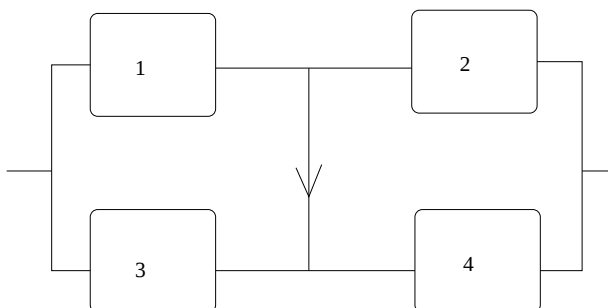
- a) Bestäm väntevärdet av antalet steg tills kedjan besökt tillstånd 3 två gånger. (6 p)
- b) Visa att kedjan har en asymptotisk fördelning samt beräkna denna. (4 p)

Uppgift 2

- a) En viss slags komponent har en exponentialfördelad livslängd med väntevärde m . För att skatta m provades i 20 provbänkar komponenter tills 10 fel erhållits. Felaktiga komponenter ersattes med felfria. Efter 15 840 timmar erhöles det 10:e felet. Beräkna ett 95% dubbelsidigt konfidensintervall för m . (5 p)
- b) Ge ett 95% konfidensintervall för sannolikheten att en komponent fungerar minst 25 000 timmar. (5 p)

Uppgift 3

I följande system är komponenterna oberoende av varandra och har alla felintensiteten $\lambda = 2 \cdot 10^{-3} h^{-1}$.



Beräkna

a) strukturfunktionen i grundform. (2 p)

b) förväntad livslängd. (2 p)

c) variansen för livslängden. (3 p)

d) approximativt sannolikheten att det under 10^5 timmar gjorts mer än 250 byten då hela systemet bytes ut mot ett felfritt då det går sönder. Utbytestiden är försumbar. (3 p)

Ledning: Man kan ha nytta av formeln

$$E(X^r) = r \cdot \int_0^\infty x^{r-1} (1 - F_X(x)) dx, \quad r > 0$$

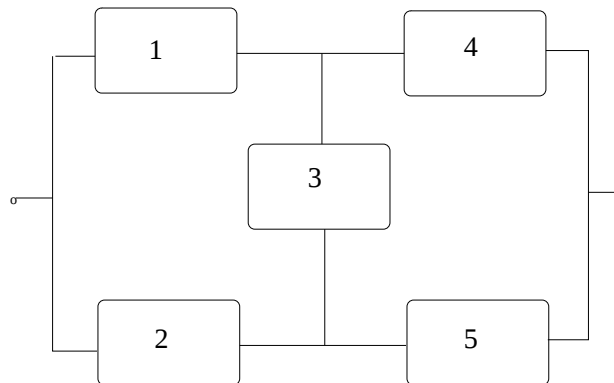
där X är en icke-negativ stokastisk variabel med fördelningsfunktionen F_X . Man kan även ha nytta av att $\int_0^\infty x^r e^{-x} dx = r!$ om r är heltal.

Uppgift 4

Ett system består av två parallellkopplade komponenter A och B som båda har felintensitet λ . Då en av komponenterna går sönder tillkallas en reparatör. Tiden tills reparatören kommer på plats är exponentialfördelad med väntevärde $1/\nu$ och därefter är reparationsintensiteten μ . Om ytterligare en komponent går sönder medan han håller på med en reparation, påbörjar han omedelbart reparation av den andra då den första färdigreparerats.

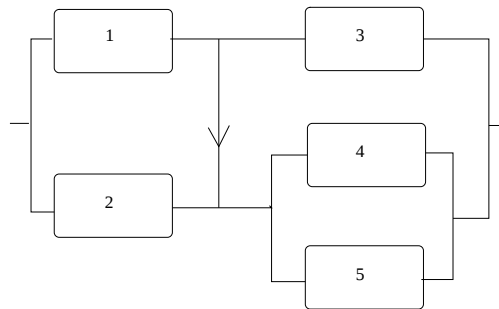
$\lambda = 10^{-3}$, $\mu = 10 \cdot 10^{-3}$ och $\nu = 20 \cdot 10^{-3} (h^{-1})$

Bestäm asymptotisk tillgänglighet. (10 p)

Uppgift 5

I systemet ovan är komponenternas livslängder associerade (vilket medför att deras tillståndsvariabler vid varje tidpunkt är associerade). Alla komponenter har felintensiteten λ .

- Ange minimala vägar respektive minimala brott. (2 p)
- Ge en övre och undre gräns för systemets funktionssannolikhet vid tidpunkten t . (5 p)
- Ge en övre och undre gräns för systemets förväntade livslängd. (3 p)

Uppgift 6

- I systemet i figuren fungerar komponenterna oberoende av varandra och har funktionssannolikheter

$$p_1 = 0.95 \quad p_2 = 0.9 \quad p_3 = 0.8 \quad p_4 = 0.7 \quad p_5 = 0.75$$

- Beräkna sannolikheten att systemet fungerar. (4 p)
- Beräkna Birnbaums tillförlitlighetsmått för komponent 1, $I^B(1)$. (3 p)
- Beräkna Vesely-Fussells tillförlitlighetsmått för komponent 5, $I^{VF}(5)$. (3 p)



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGFÖRSLAG TENTAMEN I SF2937 (f d 5B1537) TILLFÖRLITLIGHETSTEORI 2010–10–23

Uppgift 1

a) Gör om kedjan så att 3 blir ett absorberande tillstånd. Om vi låter t_i =förväntat antal steg från tillstånd i till tillstånd 3 så söks $t_1 + t_3$. Vi får

$$t_1 = 1 + 0.3t_1 + 0.3t_2 \text{ och } t_2 = 1 + 0.4t_1 + 0.3t_2 \text{ och } t_3 = 1 + 0.2t_1 + 0.4t_2.$$

Första ekvationen ger $t_1 = 1/0.7 + t_2 \cdot 0.3/0.7$ som insatt i den andra ekvationen ger

$$t_2 = 1 + \frac{4}{7} + \frac{12}{70}t_2 + \frac{3}{10}t_2$$

dvs $t_2 = 110/37$ som ger $t_1 = \frac{1}{0.7} + \frac{3}{7} \frac{110}{37} = 100/37$ som ger

$$t_3 = 1 + 0.2 \frac{100}{37} + 0.4 \frac{110}{37} = \frac{101}{37}$$

som till slut ger $t_1 + t_3 = 201/37 \approx \underline{5.43}$.

b) P -matrisen är fylld och detta innebär att kedjan är ergodisk och har en unik asymptotisk (och stationär) fördelning $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ som uppfyller $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P$ och $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} \pi_1 &= 0.3\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_2 &= 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_3 \\ \pi_3 &= 0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

Detta ger $\pi_1 = 30/101$, $\pi_2 = 34/101$ och $\pi_3 = 37/101$.

Svar: $\pi_1 \approx 0.297$, $\pi_2 \approx 0.337$, $\pi_3 \approx 0.366$

Uppgift 2

a) Total testtid $T = 20 \cdot 15840 = 316800$. Vi har vidare $\chi_{0.025}^2(2 \cdot 10) = 34.2$, och $\chi_{0.975}^2(20) = 9.59$. Konfidensintervall för $m = 1/\lambda$ (λ felintensitet) som ger

$$\left(\frac{2T}{\chi_{0.025}^2(20)}, \frac{2T}{\chi_{0.975}^2(20)} \right) = (18453, 66063).$$

b) Livslängden betecknar vi med X . Vi får då $P(X > 25000) = e^{-\lambda \cdot 25000} = e^{-25000/m}$. Konfidensintervallet ges då av

$$(e^{-25000/18453}, e^{-25000/66063}) = (0.258, 0.685).$$

Uppgift 3

a) Minimala vägarna är $\{1,2\}$, $\{1,4\}$ och $\{3,4\}$ som ger

$$\Phi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_1x_4)(1 - x_3x_4) = x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4.$$

b) $R(t) = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}$ enligt a-delen. Vi får alltså

$$m = E(T) = \int_0^\infty R(t)dt = \frac{3}{2\lambda} - \frac{2}{3\lambda} = \frac{5}{6\lambda} = \underline{416.7}.$$

c)

$$\begin{aligned} E(T^2) &= 2 \int_0^\infty tR(t)dt = 6 \int_0^\infty te^{-2\lambda t}dt - 4 \int_0^\infty te^{-3\lambda t}dt = \\ &= \frac{6}{(2\lambda)^2} \int_0^\infty ue^{-u}du - \frac{4}{(3\lambda)^2} \int_0^\infty ue^{-u}du = \frac{19}{18\lambda^2}. \end{aligned}$$

Härav fås att

$$\sigma^2 = V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{13}{36\lambda^2} = \underline{90278}.$$

d) Vi använder förnyelseteori. Om N = antalet byten efter $10^5 h$ så gäller att N är approximativt

$$N \left(\frac{10^5}{m}, \sqrt{\frac{\sigma^2 10^5}{m^3}} \right) \approx N(240, 11.2)$$

som ger att

$$P(N > 250) \approx 1 - \Phi \left(\frac{250 - 240}{11.2} \right) \approx 1 - \Phi(0.89) \approx \underline{0.19}.$$

Uppgift 4

Markovmodell!

Inför tillstånden:

E_0 = båda komponenterna fungerar

E_1 = en fungerar, väntan på reparatör

E_2 = en fungerar, reparation pågår

E_3 = ingen fungerar, väntan på reparatör

E_4 = ingen fungerar, reparation pågår Vi har intensitetsmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\nu + \lambda) & \nu & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -(\mu + \lambda) & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\nu & \nu \\ 0 & 0 & \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix} = 10^{-3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 20 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & -11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Asymptotisk fördelning uppfyller $\pi Q = \mathbf{0}$ vilket ger

$$\begin{cases} 0 = -2\pi_0 + 10\pi_2 \\ 0 = 2\pi_0 - 21\pi_1 \\ 0 = 20\pi_1 - 11\pi_2 + 10\pi_4 \\ 0 = \pi_1 - 20\pi_3 \\ 0 = \pi_2 + 20\pi_3 - 10\pi_4 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \end{cases}$$

som ger

$$\pi_2 = \frac{\pi_0}{5}, \pi_1 = \frac{2\pi_0}{21}, \pi_3 = \frac{\pi_1}{20} = \frac{\pi_0}{210}, \pi_4 = \frac{\pi_2}{10} + 2\pi_3 = \pi_0 \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{105} \right)$$

Insatt i normeringsekvationen ger detta

$$\pi_0 \left(1 + \frac{2}{21} + \frac{1}{5} + \frac{1}{210} + \frac{1}{50} + \frac{1}{105} \right) = 1$$

dvs $\pi_0 \approx 0.7521$ som i sin tur ger $\boldsymbol{\pi} \approx (0.7521, 0.0716, 0.1504, 0.0036, 0.0222)$ och eftersom systemet fungerar i tillstånden E_0, E_1, E_2 blir asymptotiska tillgängligheten $A(\infty) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \approx \underline{0.9742}$

Uppgift 5

a) Vi har de minimala vägarna

$\{1, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 3, 4\}$ samt de minimala brotten $\{1, 2\}, \{4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}$.

b) Av a-delen inses att

$$\max_j \prod_{i \in S_j} e^{-\lambda t} = e^{-2\lambda t}$$

samt

$$\min_j \prod_{i \in K_j} e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2$$

och således får vi

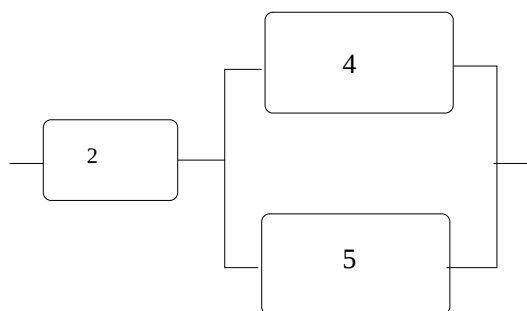
$$e^{-2\lambda t} \leq R(t) \leq 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2 = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$$

c) Vi får

$$\frac{1}{2\lambda} = \int_0^\infty e^{-2\lambda t} dt \leq \int_0^\infty R(t) dt = \text{MTTF} \leq \int_0^\infty (2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}) dt = \frac{3}{2\lambda}$$

Uppgift 6

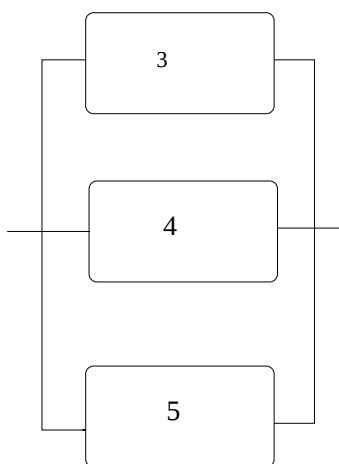
a) För att få funktionssannolikheten beräknar vi först strukturfunktionen. Enklast är att pivotera kring 1. Om $x_1 = 0$ får vi följande system



60

$$\Phi(0_1, \underline{x}) = x_2 (1 - (1 - x_4)(1 - x_5)) = x_2(x_4 + x_5 - x_4x_5)$$

och för $x_1 = 1$ får vi följande system



50

$$\Phi(1_1, \underline{x}) = 1 - ((1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_5))$$

som ger

$$\Phi(\underline{x}) = x_1 (1 - (1 - x_3)(1 - x_4)(1 - x_5)) + (1 - x_1)x_2(x_4 + x_5 - x_4x_5)$$

där Φ är i grundform. Vi sätter till slut in $x_i = p_i$ och erhåller funktionssannolikheten

$$h(\underline{p}) = p_1(1 - ((1 - p_3)(1 - p_4)(1 - p_5)) + (1 - p_1)p_2(p_4 + p_5 - p_4p_5)$$

vilket med siffror insatta ger värdet 0.977375.

b) Derivera $h(\underline{p})$ med avseende på p_1 . Vi erhåller

$$I^B(1) = \frac{\partial h(\underline{p})}{\partial p_1} = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4)(1 - p_5) - p_2(p_4 + p_5 - p_4p_5)$$

I siffror fås $I^B(1) = 0.1525$.

c) Minimala brott där 5 ingår är $\{1,4,5\}$ och $\{3,4,5\}$. På grund av oberoendet är sannolikheten att alla komponenter i något av dessa minimala brott inte fungerar är $P(5 \text{ trasig}, 4 \text{ trasig och } (1 \text{ eller } 3 \text{ trasig})) = P(5 \text{ trasig})P(4 \text{ trasig})P(1 \text{ eller } 3 \text{ trasig}) = P(5 \text{ trasig})P(4 \text{ trasig})(1 - P(1 \text{ och } 3 \text{ hela})) = P(5 \text{ trasig})P(4 \text{ trasig})(1 - P(1 \text{ hel})P(3 \text{ hel})) = (1 - p_5)(1 - p_4)(1 - p_1p_3)$.

Vesely-Fussells tillförlitlighetsmått blir således

$$I^{VF}(5) = \frac{(1 - p_5)(1 - p_4)(1 - p_1p_3)}{1 - h(\underline{p})}$$

vilket i siffror ger $I^{VF}(5) = 0.7956$.