Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KOMPLETTERINGSTENTAMEN I SF1901 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, MÅNDAG 20 APRIL 2015 KL 15.00–17.00.

Examinator: Timo Koski

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik, Mathematics Handbook (Beta), Hjälpreda för miniräknare, räknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 2 uppgifter. För godkänd krävs 75 % rätt på de 2 uppgifterna. Betyget på sf1901 blir efter godkänd komplettering E.

Tentamen är individuell och innehåller uppgifter på de lärandemål som de anmälda tentanderna inte nått upp till i en ordinarie tentamen.

Tentamen kommer att rättas omgående efter kompletteringstillfället.

Uppgift 1

Man kastar två symmetriska (sexsidiga) tärningar.

a) Bestäm sannolikheten att den tärning som visar flest prickar visar en sexa. (5 p)

b) Bestäm det förväntade antalet prickar för den tärning som visar flest prickar. (5 p)

Uppgift 2

Man har vid 10 olika tillfällen försökt att uppskatta andelen fortkörare genom att räkna antalet passerande bilar *till och med den första* fortköraren. Man erhöll följande observationsserie:

$$3 \quad 1 \quad 3 \quad 9 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 1 \quad 3 \quad 7.$$

Låt p vara sannolikheten för att föraren av en godtyckligt vald bil skall vara fortkörare. Antag att olika bilars hastighet är oberoende och har samma fördelning.

a) Härled Maximum-Likelihoodskattningen av p och beräkna den numeriskt. (5 p)

b) Härled minsta-kvadrat skattningen av p och beräkna den numeriskt. (5 p)

Lycka till!

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LöSNINGAR TILL
KOMPLETTERINGSTENTAMEN I SF1901 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, MÅNDAG 20 APRIL 2015 KL 15.00–17.00.

Uppgift 1

a) Vi har de 36 möjliga utfallen $(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)$. Dessa utfall är lika sannolika, dvs de har sannolikheten $1/36$. Vi ser att 11 av dessa utfall har 6 som högsta antal ögon. Den sökta sannnolikheten är alltså $11/36$. Rita gärna en figur enligt Figur 2.1 sid 8 i läroboken.
b) På samma sätt som ovan ser vi att sannolikheten att högsta antalet ögon är 1, 2, 3, 4, 5 och 6 är $1/36$, $3/36$, $5/6$, $7/36$, $9/36$ respektive $11/36$. Det sökta väntevärdet är alltså

$$1 \cdot 1/36 + \ldots + 6 \cdot 11/36 = 161/36 \approx 4.47\,.$$

Uppgift 2

Observationerna $x_1,\ldots,x_{10}$ är utfall av (oberoende) stokastiska variabler $X_1,\ldots,X_{10}$ där X_i betecknar antalet bilar till och med första fortköraren vid mättillfälle nr i. Låt p vara sannolikheten för att en godtyckligt vald bil skall vara en fortkörare. Då gäller

$$p_{X_i}(k) = P(X_i = k) = (1-p)^{k-1}p\,,$$

där $(1-p)^{k-1}$ är sannolikheten för att de första $k-1$ bilarna ej kör för fort och p är sannolikheten för att bil nr k kör för fort, dvs en ffg-fördelning ”för första gången”-fördelning). Detta eftersom de olika bilarnas hastigheter antogs vara oberoende av varandra.
a) Vi skattar p med ML-metoden. Likelihoodfunktionen blir

$$L(p) = \prod_{i=1}^{10}(1-p)^{x_i-1}p = (1-p)^{\sum_{i=1}^{10}(x_i-1)}p^{10} = (1-p)^{\sum_{i=1}^{10}x_i-10}p^{10}$$

eller

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{10} x_i - 10\right)\cdot \ln(1-p) + 10\cdot \ln p$$

Derivering ger

$$\frac{d\ \ln L(p)}{dp} = -\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i -\ 10}{1-p} + \frac{10}{p}\,.$$

$$\frac{d\ \ln L(p)}{dp} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i -\ 10}{1-p} = \frac{10}{p} \Leftrightarrow 10 - 10p = p\sum_{i=1}^{10} x_i -\ 10p \Leftrightarrow p = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} x_i}\,.$$

Då $\ln L(p) \to -\infty$ då $p \to 0$ eller 1 så har vi ett maximum.

Detta ger

$$\hat{p} = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} x_i} = \frac{10}{3+1+\cdots+7} = \frac{10}{40} = \underline{0.25}.$$

b) För ffg-fördelningen gäller (enligt formelsamlingen) $E(X_i) = 1/p$. MK-skattningen av p minimerar

$$Q(p) = \sum_{i=1}^{10} (x_i - 1/p)^2.$$

Minimum ges ur $Q'(p) = 0$ och vi har

$$Q'(p) = \frac{2}{p^2} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 1/p)$$

som ger

$$\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} x_i} = \frac{10}{3+1+\cdots+7} = \frac{10}{40} = \underline{0.25}.$$

Detta är MK-skattningen av p.