



Avd. Matematisk statistik

KONTROLLSKRIVNING I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
TORSDAG 7 FEBRUARI 2019 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare

Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!

För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

Två händelser A och B i ett utfallsrum Ω har sannolikheterna $P(A) = 0.4$ och $P(B) = 0.11$. Beräkna $P(A \cap B^* | B)$.

Uppgift 2

Den stokastiska variabeln X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x^3 & \text{om } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Beräkna variansen för X .

Uppgift 3

De stokastiska variablerna X och Y har varianserna $V(X) = 5$ och $V(Y) = 4$, samt kovariansen $\text{Cov}(X, Y) = 3$. Beräkna standardavvikelsen av $8X - 7Y + 38$.

Uppgift 4

Antag att en diskret stokastisk variabel X är fördelad över mängden $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$. Vi känner till följande värden på sannolikhetsfunktionen

$$p_X(-3) = \frac{1}{4}, \quad p_X(-2) = \frac{1}{4}, \quad p_X(-1) = \frac{1}{12}, \quad p_X(0) = \frac{1}{12}$$

Beräkna $F_X(-2) - F_X(-4)$, där $F_X(x)$ är fördelningsfunktionen för X .

Uppgift 5

(Denna fråga utgör en fortsättning på fråga 4) Antag att X och Y är oberoende stokastiska variabler som är fördelade på samma sätt som X i uppgift 4. Beräkna $P(X + Y = -3)$.

Lycka till!

Lösningsförslag**Uppgift 1**

$$P(A \cap B^* | B) = \frac{P(A \cap B^* \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \emptyset)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$$

Svar: 0

Uppgift 2

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx \\ &= \left[3 \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx \\ &= \left[3 \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

Svar: $\frac{3}{80} = 0.0375$ **Uppgift 3**

$$\begin{aligned} \text{Var}(8X - 7Y + 38) &= \text{Var}(8X + (-7)Y) \\ &= 8^2 \cdot \text{Var}(X) + (-7)^2 \cdot \text{Var}(Y) + 2 \cdot 8 \cdot (-7) \cdot \text{Cov}(X, Y) \\ &= 64 \cdot 5 + 49 \cdot 4 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \\ &= 180 \end{aligned}$$

Därmed blir

$$D(8X - 7Y + 38) = \sqrt{\text{Var}(8X - 7Y + 38)} = \sqrt{180}$$

Svar: $\sqrt{180} = 13.42$

Uppgift 4

$$\begin{aligned}F_X(-2) - F_X(-4) &= P(-4 < X \leq -2) \\&= p_X(-3) + p_X(-2) \\&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Svar: 0.50

Uppgift 5

Summan kan bli -3 då (X, Y) antar följande värden $(0, -3), (-3, 0), (-1, -2)$ samt $(-2, -1)$.

$$\begin{aligned}P(X + Y = -3) &= p_X(-3)p_Y(0) + p_X(0)p_Y(-3) + p_X(-1)p_Y(-2) + p_X(-2)p_Y(-1) \\&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \\&= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Svar: 0.0833