Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1922/SF1923/SF1924 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, TISDAG 28 MAJ 2019 KL 8.00–13.00.

Examinator för SF1922/SF1923: Tatjana Pavlekno, 08-790 86 44.
Examinator för SF1924 Björn-Olof Skytt, 08-790 86 49.

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II. Del I består av uppgifterna 1-12. På denna del skall endast svar anges, antingen i form av ett numeriskt värde med tre värdesiffrors noggrannhet eller i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen. Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1-3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter. Gränsen för godkänt är preliminärt 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med, preliminärt, 8 poäng. Tid och plats för komplettering kommer att anges på kursens hemsida. Del II består av uppgifterna 13-16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del skall resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar skall förklaras och definieras och numeriska svar skall anges med minst två värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på datorlaborationen får 4 bonuspoäng på del II på ordinarie tentamenstillfället och det första omtentamenstillfället.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

I en känd tävling möts 16 tävlande i en semifinal och 17 andra i en annan semifinal. Från varje semifinal går 10 vidare till final. I finalen deltar förutom de 20 som kvalificerat sig från semifinalerna även 6 direktkvalificerade. Antag att alla dessa 26 som deltar i finalen är lika bra i den meningen att alla har lika stor chans att röstas fram. Vad är då sannolikheten att bland de 5 bästa i finalen minst 2 var direktkvalificerade?

A: 0.046

B: 0.236

C: 0.322

D: 0.764

Uppgift 2

Vädret en sommardag kan indelas i tre olika typer: A:högtryck, B:ostadigt, C:lågtryck. Sannolikheterna för de olika typerna är 0.2, 0.5, resp. 0.3,och sannolikheten att det regnar vid väderlekstyp A, B, C är 0.05, 0.4 resp. 0.9. En person vaknar en sommardag och hör att det regnar. Beräkna sannolikheten att det är ostadigt.

Uppgift 3

En stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{4}, & 1 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Bestäm $V(X)$.

A: 1.05

B: 1.11

C: 2.43

D: 5.92

Uppgift 4

Sannolikheten att en slumpmässigt vald hasselnöt är möglig är 0.1. Klas knäcker 500 nötter. Beräkna approximativt sannolikheten att minst 60 av dem är mögliga.

A: 0.090

B: 0.167

C: 0.323

D: 0.421

Uppgift 5

Tiden mellan två översvämningar i ett flodområde anses vara exponentialfördelad med väntevärde 8 år. Beräkna sannolikheten att det dröjer mindre än fem år mellan två översvämningar.

A: 0.202

B: 0.465

C: 0.535

D: 0.798

Uppgift 6

$X \in N(2,3)$, $Y \in N(0,2)$. X och Y är oberoende. $Z = X - 2Y$. Beräkna $P(Z \leq 5)$.

A: 0.726

B: 0.755

C: 0.910

D: 0.999

Uppgift 7

Antag att $X_1, \ldots, X_n$ utgör ett stickprov på $N(\mu, \sigma)$. Från tio observationer erhölls följande värden $\overline{x} = 2.18$, samt $s = 1.03$. Ange övre gränsen för det tvåsidiga konfidensintervallet för σ^2 med konfidensgrad 95%.

A: 1.69

B: 1.88

C: 2.87

D: 3.54

Uppgift 8

I en rapport står: "Vi antog att våra 9 mätningar kom från en normalfördelning där vi skattade $\mu^*_{obs.} = \bar{x} = 4.9$ och $\sigma^*_{obs.} = s = 0.9$. Konfidensintervallet för μ blev $(3.893, 5.907)$." Vilken konfidensgrad har intervallet?

Uppgift 9

Antag att en stokastisk variabel X är $Po(\theta)$-fördelad och man vill testa $H_0: \theta = 3$ mot $H_1: \theta < 3$. Man gör ett försök och får observationen $x = 1$ av X. Bestäm testets p-värde.

Uppgift 10

Man vill testa om en slumptalsgenerator verkligen genererar $U(0,1)$-fördelade slumptal, dvs nollhypotesen är att slumptalen kommer från en $U(0,1)$-fördelning. För att utföra statistisk analys lät man generatorn slumpa fram 100 tal som föll inom 5 lika stora intervall på följande sätt

Intervall	0-0.2	0.2-04	0.4-0.6	0.6-0.8	0.8-1
Observerade	23	22	22	18	15
Förväntade under H_0	20	20	20	20	20

Vilken slutsats kan man dra då man fått dessa data?

A: H_0 kan varken förkastas på risknivån 1% eller risknivån 5%.

B: H_0 kan både förkastas på risknivån 1% och risknivån 5%.

C: H_0 kan förkastas på risknivån 1% , men inte på risknivån 5%.

D: H_0 kan förkastas på risknivån 5% , men inte på risknivån 1%.

Uppgift 11

En stokastisk variabel X är $Exp(\lambda)$-fördelad, där $\lambda > 0$ är okänd parameter. Två oberoende observationer av X erhålls: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Ange det numeriska värdet på ML-skattningen av λ.

Uppgift 12

Ett stickprov av oberoende observationer, $x_1 = 30, x_2 = 36$ och $x_3 = 39$ erhålls från en stokastisk variabel X vars fördelning har $E(X) = \mu$ och $V(X) = \sigma^2 > 0$ där båda parametrarna μ och σ antas vara okända. Givet att σ skattas med roten ur stickprovsvariansen, bestäm medelfelet av skattningen $\mu^*_{obs} = \bar{x}$ baserat på ovanstående data.

A: 2.65

B: 3.24

C: 4.58

D: 4.67

Del II

Uppgift 13

Ett tryckeri ska trycka en bok. Varje bibliotek beställer 20, 30 eller 40 exemplar av boken med lika stor sannolikhet. Hundra bibliotek beställer boken. Hur många böcker ska tryckas om det med approximativt 95% sannolikhet ska räcka till alla hundra biblioteken? Dina approximationer ska tydligt motiveras. (10 p)

Uppgift 14

a) Den karakteristiska snölasten på ett tak är det värde som med en sannolikhet av 98% inte överskrids, dvs 2% kvantilen i fördelningen som beskriver lasten. Bestäm den karakteristiska snölasten, om lasten X följer Weibullfördelningen med fördelningsfunktion

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/10)^{0.4}} \quad \text{för} \quad x \geq 0.$$

(2 p)

b) Låt Y vara en stokastisk variabel som kan anta värdena 0, 1, 2 och 3. Vi vet att $E(Y) = 1.7$, $D(Y) = 0.9$, samt $P(Y \geq 2) = 0.6$.

i) Beräkna $E(9 - 5Y + 2Y^2)$. (3 p)

ii) Beräkna $E(Y^3)$. (5 p)

Uppgift 15

När de två fågelarterna, *lövsångare* och *rörsångare*, flyttar rastar de på Fågelö i Östergötland. Ornitologen är intresserad av hur lång tid olika fåglar rastar på ön. Metoden för att avgöra om tiderna som de olika arterna rastar skiljer sig åt går ut på att jämföra hur vanligt det är i varje art att fåglar rastar kortare än 100 timmar på ön. För att utföra statistisk analys har man noterat de enskilda tiderna hos 325 lövsångare och 470 rörsångare. Av dessa visade det sig att 50 lövsångare respektive 40 rörsångare rastade kortare tid är 100 timmar. Man får enligt den förenklade modellen anta att olika fåglarnas rastningstider är oberoende av varandra. Avgör approximativt på 5% signifikansnivå om de två fågelarterna skiljer sig åt vad gäller sannolikheten att uppehålla sig kortare än 100 timmar på Fågelö. Formulera tydligt lämpliga modeller och hypoteser samt motivera de approximationer du använder. Din slutsats ska tydligt framgå. (10 p)

Uppgift 16

Antalet partiklar som sönderfaller under en tidsperiod τ (enhet: s) kan beskrivas av en Poissonfördelad stokastisk variabel $X(\lambda\tau)$, dvs $X(\lambda\tau) \in Po(\lambda\tau)$ där λ är sönderfallsintensiteten (enhet: s^{-1}). På ett fysiklaboratorium mätte en laboratorieassistent antalet sönderfall $X(\lambda\tau)$ vilket resulterade i $x = 4$ under tiden $\tau = 5s$.

a) Härled MK-skattningen av λ. Undersök om skattningen är väntevärdesriktig samt ange dess numeriska värde. (2 p)

b) Undersök på 5% signifikansnivån om den sanna intensiteten λ kan anses vara mindre än $1s^{-1}$. Formulera tydligt dina hypoteser och slutsatser. (4 p)

c) Laboratorieassistenten vill göra ett test på sannolikheten, p, för att man får exakt noll sönderfall under en minut, dvs testa $H_0 : p = e^{-60}$ vs $H_1 : p > e^{-60}$. Formulera om hypoteserna så att de uttrycks som villkor för λ i stället. Formulera tydligt vad laboratorieassistenten ska dra för slutsats om p? (4 p)

LYCKA TILL!

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMEN I SF1922/SF1923/SF1924 SANNOLOKHETSTEORI OCH STATISTIK.
TISDAGEN 28 MAJ 2019 KL 08.00–13.00

Uppgift 1

Låt X vara antalet direktkvalificerade som hamnar bland de 5 bästa. Då har vi att X$\in$ Hyp(N, n, p), där $N = 26$, $n = 5$ och $p = 6/26$. Den sökta sannolikheten blir då

$$P(\mathrm{X} \geq 2) = 1 - P(\mathrm{X} \leq 1) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{20}{5} + \binom{6}{1}\binom{20}{4}}{\binom{26}{5}} = 0.3224$$

Svar: <u>Sannolikheten att minst 2 av de 5 bästa var direktkvalificerade är 0.322.</u>

Uppgift 2

Inför händelsen R att det regnar. Den sökta sannolikheten att det är ostadigt väder om det regnar är då $P(\mathrm{B}|\mathrm{R})$ vi beräknar den genom att använda Bayes sats och får då

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{B}|\mathrm{R}) &= [\text{Bayes sats}] = \\
&= \frac{P(\mathrm{R}|\mathrm{B})\,P(\mathrm{B})}{P(\mathrm{R}|\mathrm{A})\,P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{R}|\mathrm{B})\,P(\mathrm{B}) + P(\mathrm{R}|\mathrm{C})\,P(\mathrm{C})} = \\
&= \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.05 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.3} = 0.42
\end{aligned}$$

Svar: <u>Sannolikheten att det är ostadigt väder om det regnar är 0.42.</u>

Uppgift 3

Väntevärdet blir

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x \cdot x^3 dx + \int_1^4 x \cdot \frac{1}{4} dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^4 \\
&= \frac{1}{5} + \left[2 - \frac{1}{8}\right] \\
&= = \frac{1}{5} + \frac{15}{8} \\
&= \frac{83}{40} = 2.075
\end{aligned}$$

Andra momentet blir

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\, dx \\
&= \int_0^1 x^2 \cdot x^3 dx + \int_1^4 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx \\
&= \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^4 \\
&= \frac{1}{6} + \left[\frac{64}{12} - \frac{1}{12}\right] \\
&= = \frac{2}{12} + \frac{63}{12} \\
&= \frac{65}{12} = 5.417
\end{aligned}$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = 5.417 - (2.075)^2 = 1.11$$

Uppgift 4

Om vi låter händelsen A vara att hasselnöten är möglig så är $p = P(A) = 0.1$ och då Klas knäcker $n = 500$ nötter kan vi tänka på detta som femhundra binomialförsök. Om X räknar antalet lyckade försök, så vet vi att $X \in \mathrm{Bin}(500, 0.1)$.

$$P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 59)$$

Vi approximerar binomialfördelningen med normalfördelningen. Detta går bra om $np(1-p) \geq 10$ (se sidan 171 i Blom *et al.*) Nu är $np(1-p) = 500 \times 0.1 \times 0.9 = 45 \geq 10$, så villkoret är uppfyllt.

$$\begin{aligned}
1 - P(X \leq 59) &= 1 - P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{59 - np}{\sqrt{npq}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{59 - 50}{\sqrt{45}}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.34) \\
&= 1 - 0.9099 \\
&= 0.090
\end{aligned}$$

Uppgift 5

Låt X vara tiden mellan två översvämningar. Då har X täthetsfunktionen $f_X(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}}$ för $x \geq 0$ så att

$$P(X < 5) = \int_0^5 f_X(x)dx = \int_0^5 \frac{1}{8}e^{-\frac{x}{8}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{8}}\right]_0^5 = 1 - e^{-\frac{5}{8}} = 0.4647$$

Uppgift 6

Varje linjärkombination av oberoende Normalfördelade stokastiska variabler är Normalfördelad.
$E(X-2Y) = 2 - 2\cdot 0 = 2$ och $V(X-2Y) = V(X) + 4V(Y) = 3^2 + 4\cdot 2^2 = 25$
$X - 2Y \in N(2,5)$. Låt $Z = X - 2Y$.

$$P(Z \leq 5) = P\left(\frac{Z-2}{5} \leq \frac{5-2}{5}\right) = \Phi(0.60) = 0.726$$

Uppgift 7

Eftersom $n = 10$ och $\alpha = 0.05$, blir $f = 9$ och $\chi^2_{0.975}(9) = 2.70$. Då $s = 1.03$ blir den övre gränsen

$$\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(f)} = \frac{1.03^2 \times 9}{2.70} = 3.54$$

Uppgift 8

Vi har här konfidensintervall för μ när σ är okänd.
F.S. §12.2 och §11.1d ger då

$$I_\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

Halva konfidensintervallets bredd =

$$\frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 5.907 - 4.9 = 1.007$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 1.007\frac{\sqrt{n}}{s} = 1.,007\frac{\sqrt{9}}{0.9} = 3.36$$

$$D.v.s. \qquad t_{\frac{\alpha}{2}}(8) = 3.36$$

$$Tab3 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.005 \Rightarrow \alpha = 0.01$$

Alltså har vi ett konfidensintervall med konfidensgraden 99% .

Uppgift 9

p-värdet = P(förkasta H_0) om H_0 är sann. D.v.s. P(att förkasta att $\theta = 3$) om $\theta = 3$. Vi har som kriterium att förkasta att $\theta = 3$ om $x \leq 1$, vilket leder till att p-värdet = $P(X \leq 1)$ om $X \in Po(3)$ Vi tittar i tab 5 och får att p-värdet i detta fall är 0.19915.

Uppgift 10

Här har vi test av given fördelning och gör ett χ^2-test enl §14.3

$$Q = \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(15-20)^2}{20} = \frac{23}{10} = 2.3$$

Vi har(se tabell 4)

$$Q = 2.3 < \chi^2_{0.05}(5-1) = 9.49 < \chi^2_{0.01}(5-1) = 13.3$$

Detta betyder att vi inte kan förkasta nollhypotesen på risknivån 5 % , och inte heller på risknivån 1%.

Uppgift 11

Notationen $X_i \in \mathrm{Exp}\,(\lambda)$ betyder att tätheten för X_i är $f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x_i}$. Därmed blir likelihood-funktionen

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_1} = \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}$$

och log-likelihoodfunktionen

$$\ln L(\lambda) = 2 \ln \lambda - \lambda (x_1 + x_2).$$

Om vi maximerar $\ln L(\lambda)$ m a p λ har vi

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2}{\lambda} - (x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{x_1 + x_2} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

Då $x_1 = 2$ och x_2=3 blir $\overline{x} = \frac{5}{2}$ och ML-skattningen blir $1/(5/2) = \frac{2}{5} = 0.4$.

Uppgift 12

$$\bar{x} = \frac{30+36+39}{3} = 35$$

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{5^2 + 1^2 + 4^2}{3-1} = 21$$

medelfelet

$$= D^*(\mu^*)_{obs} = D^*(\bar{X})_{obs} = (\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^*_{obs} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 2.65$$

Uppgift 13

Låt X_i=antal böcker som bibliotek nr i beställer. Då gäller

$$\begin{aligned} E(X_i) &= \frac{1}{3}\times 20 + \frac{1}{3}\times 30 + \frac{1}{3}\times 40 = 30 \\ V(X_i) &= \frac{1}{3}\times(20-30)^2 + \frac{1}{3}\times(30-30)^2 + \frac{1}{3}\times(40-30)^2 = 66.6667 \end{aligned}$$

Det totala antalet böcker som efterfrågas är $\sum_{i=1}^{100} X_i$. Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller att $\sum_{i=1}^{100} X_i \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) = N(100{\cdot}30, \sqrt{66.6667}{\cdot}\sqrt{100})$, alltså har vi att $\sum_{i=1}^{100} X_i \approx N((3000, 10\sqrt{66.6667})$. Bestäm antalet böcker y sådana att

$$0.95 = P(\sum_{i=1}^{100} X_i \le y) \approx \Phi\left(\frac{y-3000}{10\sqrt{66.6667}}\right)$$

$$\frac{y-3000}{10\sqrt{66.6667}} = \lambda_{0.05} = 1.6449$$

$$y = 3000 + 1.6449\cdot 10\sqrt{66.6667} = 3134.3$$

Man bör alltså beställa 3135 böcker inför bibliotekens inköp.

Uppgift 14

a) Vi hittar α-kvantilen genom att lösa ekvationen $F_X(x) = 1-\alpha$ för $x = x_\alpha$. (se sidan 68 i Blom *et al.*) I vårt fall är $\alpha = 0.02$. Detta ger

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\left(\frac{x}{10}\right)^{0.4}} &= 0.98 \quad \Leftrightarrow \\ e^{-\left(\frac{x}{10}\right)^{0.4}} &= 0.02 \quad \Leftrightarrow \\ -\left(\frac{x}{10}\right)^{0.4} &= \ln 0.02 \quad \Leftrightarrow \\ \left(\frac{x}{10}\right)^{0.4} &= \ln 50 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{x}{10} &= (\ln 50)^{2.5} \quad \Leftrightarrow \\ x &= 10\times(\ln 50)^{2.5} = 302.69 \end{aligned}$$

b)
i) Eftersom $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = D(X)^2 + E(X)^2 = 0.9^2 + 1.7^2 = 0.81 + 2.89 = 3.7$, så är

$$E(9 - 5X + 2X^2) = 9 - 5E(X) + 2E(X^2) = 9 - 5\cdot 1.7 + 2\cdot 3.7 = \underline{7.9}.$$

ii) Vi måste bestämma sannolikhetsfunktionen för X, d.v.s. talen $p_i = P(X=i)$, $i = 0,1,2,3$. Enligt uppgiften så uppfyller dessa tal ekvationssystemet

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 &= E(X) = 1.7 \\ p_1 + 4p_2 + 9p_3 &= E(X^2) = 3.7 \\ p_2 + p_3 &= P(X \ge 2) = 0.6 \end{aligned}$$

som har lösningen $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.2$. Alltså får vi:

$$E(X^3) = p_1 + 2^3 p_2 + 3^3 p_3 = 0.3 + 8 \cdot 0.4 + 27 \cdot 0.2 = \underline{8.9}.$$

Uppgift 15

H_0 är här att ingen statistiskt säkerställd skillnad finns vad gäller tiderna som de båda fågelarterna rastar på ön. H_1 är att vi har en statistiskt säkerställd skillnad vad gäller tiderna som de båda fågelarterna rastar på ön. Vi antar här att X_1 är antalet lövsångare som rastat kortare tid än 100 timmar på ön och att X_2 är antalet rörsångare som rastat kortare tid än 100 timmar på ön . X_1 är då $Bin(n_1, p_1)$ och X_2 är $Bin(n_2, p_2)$. Vi vill nu bilda ett approximativt konfidensintervall för $p_1 - p_2$, men då måste X_1 och X_2 vara approximativt Normalfördelade. Villkoret för detta är att $np(1-p) > 10$ för X_1 och X_2. Vi skattar p_1 med $x_1/n_1 = 50/325$ och p_2 med $x_2/n_2 = 40/470$. Vi får då att $n_1 p^*_{1,obs}(1 - p^*_{1,obs}) = 42.3 > 10$ och $n_2 p^*_{2,obs}(1 - p^*_{2,obs}) = 36.6 > 10$. Villkoret är uppfyllt och vi kan bilda konfidensintervallet

$$I_{p_2 - p_1} = \left(p^*_{2,obs} - p^*_{1,obs} \pm \sqrt{p^*_{1,obs}(1 - p^*_{1,obs})/n_1 + (p^*_{2,obs}(1 - p^*_{2,obs})/n_2} \cdot \lambda_{\alpha/2} \right).$$

Vi har en konfidensgrad på $1 - \alpha = 0.95$ och då fås $\lambda_{\alpha/2} = 1.9600$ och intervallet blir

$$0.0687 \pm 0.0237 \cdot 1.96 = 0.0687 \pm 0.0466 = (0.0221, 0.1153).$$

0 tillhör inte intervallet och vi kan således förkasta H_0 på risknivån 5%.
Vi drar slutsatsen att skillnaden mellan rasttiderna är statistiskt säkerställd på risknivån 5% .

Uppgift 16

a) Vi har en observation $x = 4$ från $X(5) \in Po(5\lambda)$, där $E(X(5)) = 5\lambda$ vilket ger

$$Q(\lambda) = (x - 5\lambda)^2.$$

Minimera Q genom att sätta derivatan av Q med avseende på λ till noll.

$$\frac{dQ}{d\lambda} = -2 \cdot 5 \cdot (x - 5\lambda) = 0,$$

vilket ger

$$\lambda^*_{\text{MK,obs}} = \frac{x}{5} = \frac{4}{5} = 0.8\, s^{-1}.$$

b) Om $H_0 : \lambda = 1$ är sann gäller att $X(5) \in Po(5)$ och P-värdet för direktmetoden ges av

$$\begin{aligned} p &= P(\text{få det vi fick eller värre när } H_0 \text{ är sann}) = \\ &= P(X(5) \le 4 \text{ om} X(5) \in Po(5)) \\ &= [\text{Tabell}] = 0.44049 \end{aligned}$$

c) Vi har att antalet sönderfall under en minut, d v s 60 sekunder, är $X(60) \in Po(60\lambda)$. Då ges p av

$$p = P(X(60) = 0) = e^{-60\lambda} \frac{(60\lambda)^0}{0!} = e^{-60\lambda}.$$

Mothypotesen $H_1 : p > e^{-60\lambda}$ kan då skrivas om som $p = e^{-60\lambda} > e^{-60} \Leftrightarrow \lambda < 1$. Det är ju det vi testade i (b) och slutsatsen blir att hon inte kan påstå att p är större än e^{-60}.