



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1920/SF1921
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
FREDAG 7 FEBRUARI 2025 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare

Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten! Endast den bifogade svarsblanketten kommer att rättas.

För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

Ur en vanlig kortlek, som består av 52 kort med 13 kort i var och en av de 4 olika färgerna, drar man utan återläggning slumpvis 4 kort. Beräkna sannolikheten att man då får ett kort i varje färg.

Uppgift 2

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$, och $P(A|B^*) = 0.75$.

Beräkna $P(A \cup B)$.

(B^* är komplementet till B .)

Uppgift 3

X är en stokastisk variabel med fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$Y = X^2$$

Beräkna variansen $V(Y)$.

Var god vänd!

Uppgift 4

De diskreta stokastiska variablerna X och Y är oberoende med sannolikhetsfunktioner

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{3}, k = 0 \\ \frac{2}{3}, k = 1 \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, k = 0 \\ \frac{3}{4}, k = 1 \\ 0, \text{ annars} \end{cases}$$

Låt $Z = \min(X, Y)$ = det minsta av X och Y .

Beräkna väntevärdet $E(Z)$.

Uppgift 5

De stokastiska variablerna X och Y har standardavvikelserna $D(X) = 3$ och $D(Y) = 4$. De är beroende på så sätt att kovariansen är $C(X, Y) = 10$.

Beräkna standardavvikelsen $D(5X - 3Y + 4)$.

Lycka till!

Lösningsförslag**Uppgift 1**

Alternativ I:

Vi räknar utan hänsyn till ordningen som korten dras. Antal möjliga sätt att dra 4 kort från 52 är då $\binom{52}{4}$.

I varje färg kan man välja ett kort från 13 på $\binom{13}{1}$ sätt.

Detta ger sökt sannolikhet till

$$\frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}}{\binom{52}{4}} \approx 0.105$$

Alternativ II:

Vi räknar med hänsyn till ordningen som korten dras. Antal möjliga sätt att dra 4 kort från 52 är då $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$. Antal gynnsamma sätt blir då $52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13$.

Detta ger sökt sannolikhet till

$$\frac{52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0.105$$

Uppgift 2

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^*) = P(A) - P(A|B^*)P(B^*) = 0.4 - 0.75 \cdot 0.4 = 0.1$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = 0.9$$

Uppgift 3

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = E(X^4) - E^2(X^2)$$

$$E(X^4) = \int_0^1 x^4 f_X(x) dx = \int_0^1 x^4 \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{7}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow V(Y) = \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{12}{175} \approx 0.0686$$

Uppgift 4

$$P(Z = 1) = P(X = 1 \cap Y = 1) = [\text{oberoende}] = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sål\u00e4des \u00e4r } P(Z = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Allts\u00e5 blir } E(Z) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5.$$

Uppgift 5

$$V(5X - 3Y + 4) = V(5X - 3Y) = C(5X - 3Y, 5X - 3Y) =$$

$$= C(5X, 5X) + C(5X, -3Y) + C(-3Y, 5X) + C(-3Y, -3Y) =$$

$$= 25V(X) - 2 \cdot 5 \cdot 3C(X, Y) + 9V(Y) = 25 \cdot 9 - 300 + 9 \cdot 16 = 69$$

$$\Rightarrow D(5X - 3Y + 4) = \sqrt{69} \approx 8.31.$$