



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK, MÅNDAG 10 MARS 2025 KL 08.00–13.00

Examinator: Björn-Olof Skytt, tel 08-790 8649.

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II. Del I består av uppgifterna 1-12. På denna del skall endast svar anges, antingen i form av ett numeriskt värde med tre värdesiffrors noggrannhet eller i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen. Svaren anges på svarsblanketten.

Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1-3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen behöver ej besvara uppgift 12, utan får tillgodoräkna sig denna uppgift (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Detta gäller endast på den här tentan och vid omtentamen i juni 2025. Gränsen för godkänt är 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 8 poäng.

Del II består av uppgifterna 13-16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på eller får komplettera del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del skall resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar skall förklaras och definieras och numeriska svar skall anges med minst två värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen får 3 bonuspoäng på del II på det här ordinarie tentamenstillfället och omtentamenstillfället i juni 2025.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

Anta att ett visst drogtest kan identifiera en droganvändare i 98 % av fallen. Men i 1 % av fallen visar testet ett positivt resultat då den som testats inte är droganvändare. Om 10 % av alla testade är droganvändare, vad är sannolikheten för att en person som har testats positivt för droganvändning egentligen inte är en droganvändare.

A: 0.009

B: 0.084

C: 0.098

D: 0.107

Uppgift 2

(X, Y) är en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel vars täthetsfunktion är

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Beräkna variansen $V(2X^2 + 3)$.

A: 1/6

B: 1/4

C: 1/3

D: 1/2

Uppgift 3

Låt X och Y vara stokastiska variabler vars varianser är 4 respektive 9. Om X och Y är beroende, kan variansen av $X + Y$ vara antingen större eller mindre än 13, men den kan inte bli hur stor eller liten som helst. Hur stor kan variansen av $X + Y$ högst vara, om X och Y är beroende?

A: 16

B: 19

C: 22

D: 25

Uppgift 4

Tiden mellan två översvämningar i ett flodområde anses vara exponentialfördelad med väntevärde 8 månader. Beräkna medianen för tiden mellan två översvämningar.

A: 5.545 månader

B: 8.000 månader

C: 8.693 månader

D: 10.455 månader

Uppgift 5

Tim har ingen brådska med att ta examen. Han tänker skriva sin sista tenta tills han klarar den, men han orkar inte plugga. Han bedömer därför att hans chans att klara tentan är 20% varje gång. Bestäm sannolikheten att han behöver skriva tentan minst 2 men högst 5 gånger.

- A: 0.230
- B: 0.312
- C: 0.472
- D: 0.538

Uppgift 6

Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler där $X \in N(2, 3)$ och $Y \in N(4, 2)$. Dvs. X har väntevärdet 2 och standardavvikelsen 3, medan Y har väntevärdet 4 och standardavvikelsen 2. Låt $Z = X - 2Y$. Beräkna $P(Z > 4)$.

- A: 0.023
- B: 0.345
- C: 0.468
- D: 0.655

Uppgift 7

$X \in U(0, \theta)$ och $Y \in U(0, 2\theta)$. Antag att vi erhållit stickprovet x_1, x_2, x_3, x_4 som utfall av X och att vi erhållit stickprovet y_1, y_2, y_3, y_4 som utfall av Y .

Vi sätter $\theta_{\text{obs}}^* = 2\bar{x}$ och $\hat{\theta}_{\text{obs}} = \bar{y}$

Vilket av nedanstående påståenden är sant?

- A: θ_{obs}^* är den effektivaste skattningen av θ .
- B: $\hat{\theta}_{\text{obs}}$ är den effektivaste skattningen av θ .
- C: Bägge skattningarna är lika effektiva.
- D: Man kan inte avgöra vilken av skattningarna som är effektivast, eftersom minst en av dem inte är väntevärdesriktig.

Uppgift 8

Två stickprov från två populationer. Varje stickprov uppfattas som observationer på $N(\mu_i, \sigma_i)$, där vi antar att $\sigma_1 = \sigma_2$. Från de två stickproven beräknades följande sammanfattande mått: från stickprov 1

$$n_1 = 4 \quad \bar{x}_1 = 1007.25 \quad s_1 = 143.66$$

från stickprov 2

$$n_2 = 4 \quad \bar{x}_2 = 817.75 \quad s_2 = 73.627$$

Beräkna ett 95%-igt ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

A: $(-\infty, 322.3)$

B: $(-\infty, 346.1)$

C: $(-\infty, 387.2)$

D: $(-\infty, 397.4)$

Uppgift 9

Kundserviceavdelningen hos ett visst företag överväger att anställa fler personer för att svara i telefon när deras kunder ringer i olika ärenden. Det är därför av intresse att modellera antalet inkommande samtal under en arbetsdag, vilket antas följa en Poissonfördelning med okänd parameter μ . För att skatta μ har avdelningen räknat det totala antalet samtal under 30 dagar och ser då att 286 olika samtal har registrerats under den perioden. Bestäm ett approximativt tvåsidigt konfidensintervall med konfidensgrad 95% för μ . Vad är den undre gränsen för detta intervall?

A: 3.48

B: 4.45

C: 8.43

D: 8.61

Uppgift 10

Vid tillverkning av skruvar får variationerna hos huvudenas diameter inte vara för stora. Man har mätt diametern hos 41 skruvar och beräknat stickprovets standardavvikelse $s = 0.023$ mm. Ge övre begränsning för den sanna standardavvikelse σ , som med 95% är korrekt. Dvs ange övre gränsen för det tvåsidiga 95% konfidensintervallet för σ . Mätvärdena på diametrarna kan anses normalfördelade.

A: 0.029

B: 0.032

C: 0.035

D: 0.044

Uppgift 11

Antag att $X \in \text{Exp}(\lambda)$. Vi vill pröva nollhypotesen $H_0 : \lambda = 0.2$. Vi förkastar H_0 till förmån för mothypotesen $H_1 : \lambda = 0.6$ om vi får en observation: $x < 3$. Vi får en observation: $x = 1.2$. Bestäm p-värdet.

A: 0.21

B: 0.45

C: 0.51

D: 0.83

Uppgift 12

En stokastisk variabel har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \frac{1}{2m} e^{-|x|/m}, \quad -\infty < x < \infty,$$

där $m > 0$ är en okänd parameter. (Beteckningen $|x|$ betyder absolutbeloppet av x , dvs. $|x| = x$ om $x \geq 0$ och $|x| = -x$ om $x \leq 0$.) Antag att vi erhållit stickprovet x_1, x_2, x_3, x_4 från ovanstående fördelning, dvs. x_1, x_2, x_3, x_4 är utfall av oberoende stokastiska variabler som alla har täthetsfunktionen enligt ovan med samma okända parameter m . Antag att $x_1 = -3.7$, $x_2 = 4.6$, $x_3 = -1.1$ och $x_4 = 0.2$ observerats.

Ange Maximum-Likelihood-skattningen av m .

A: 0.42

B: 0.83

C: 1.2

D: 2.4

Var god vänd!

Del II

Uppgift 13

I en produktionsprocess blir enheterna felaktiga med sannolikhet p oberoende av varandra. Om två tillverkade enheter i rad blir felaktiga, justeras tillverkningsprocessen.

Vad är sannolikheten att tillverkningsprocessen justeras innan 5 enheter (dvs högst 4) har tillverkats om $p = 0.1$? (10 p)

Uppgift 14

En polymerkedja består av 50 000 dimerer, kemiskt bundna till varandra i en lång rad. Polymerkedjan utsätts för en viss form av stress. Därvid kan en dimerbindning brista och varje bindning har en livslängd som är exponentialfördelad med väntevärde 90 dygn. Livslängderna är oberoende av varandra. Beräkna sannolikheten att fler än 500 bindningar brustit under det första dygnet. Använda approximationer skall vara välmotiverade. (10 p)

Uppgift 15

I ett miljö-övervakningssystem studeras övergödningen av våra vattendrag. I en viss å har man under en längre period gjort mätningar av bl.a kvävehalten. För att undersöka om övergödningen ökade mättes kvävehalten i vattendraget. Nedan ges medelvärdet av sommarmånadernas kvävehalt för ett antal år:

År	2005	2006	2009	2012	2015	2017	2020
Kvävehalt (mg/l)	0.37	0.47	0.64	0.52	0.99	0.97	1.08

Antag att kvävehalten ändras linjärt under den studerade perioden. Gör ett 95% konfidensintervall för den årliga förändringen av kvävehalten i vattendraget. (10 p)

Uppgift 16

Man beräknar konfidensintervall för två olika parametrar med konfidensgrad $1 - \alpha$ för vardera intervallet.

a) Ange säkerheten (konfidensgraden) som funktion av α i påståendet att båda intervallen innehåller motsvarande parametrar om de två konfidensintervallen är oberoende av varandra (t. ex. för att de är baserade på två oberoende datauppsättningar). (3 p)

b) Ange övre och undre gränsen för säkerheten (konfidensgraden) som funktion av α i påståendet att båda intervallen innehåller motsvarande parametrar om man inte kan anta att intervallen är oberoende av varandra. (7 p)

Lycka till!



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG
TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK,
TISDAG 12 MARS 2024 KL 8.00–13.00.

Del I, Svar

1. B
2. C
3. D
4. A
5. C
6. A
7. C
8. B
9. C
10. A
11. A
12. D

Del I, Lösningsförslag**Uppgift 1**

Låt händelsen D vara droganvändare och händelsen $+$ vara att testet visar positivt.

Vi söker $P(D^*|+)$

$$P(D^*|+) = \frac{P(D^* \cap +)}{P(+)} = \frac{P(+|D^*)P(D^*)}{P(+|D^*)P(D^*) + P(+|D)P(D)} = \frac{0.01 \cdot 0.9}{0.01 \cdot 0.9 + 0.98 \cdot 0.1} = 0.0084$$

Uppgift 2

(X, Y) är en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel vars täthetsfunktion är

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Vi söker variansen $V(2X^2 + 3) = 4V(X^2)$.

$$V(X^2) = E(X^4) - E^2(X^2)$$

$$E(X^4) = \int_0^1 \int_0^1 x^4 f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 4x^5 y dx dy = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \int_0^1 x^2 f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 4x^3 y dx dy = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Alltså gäller att } V(X^2) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Alltså är } V(2X^2 + 3) = 4V(X^2) = \frac{1}{3}.$$

Uppgift 3

Låt X och Y vara stokastiska variabler vars varianser är 4 respektive 9. Om X och Y är beroende, kan variansen av $X + Y$ vara antingen större eller mindre än 13, men den kan inte bli hur stor eller liten som helst. Hur stor kan variansen av $X + Y$ högst vara, om X och Y är beroende?

Vi vet att $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X, Y)$ och att

$$-1 \leq \rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{D(X)D(Y)} \leq 1$$

Det betyder att kovariansen $C(X, Y)$ högst kan vara $D(X)D(Y) = 2 \cdot 3 = 6$.

$$\text{Alltså gäller att } V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2C(X, Y) \leq 4 + 9 + 2 \cdot 6 = 25.$$

Uppgift 4

Fördelningsfunktionen för exponentialfördelningen med väntevärde åtta ges som $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{8}}$. Medianen är lösningen till ekvationen $F_X(x) = \frac{1}{2}$. Alltså löser vi

$$1 - e^{-\frac{x}{8}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-8)(-\ln 2) = 5.545$$

Uppgift 5

Låt X vara första gången Tim klarar tentan. $X \in \text{ffg}(0.2)$.

Vi söker $P(2 \leq X \leq 5)$.

$$P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.2 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.8^2 + 0.2 \cdot 0.8^3 + 0.2 \cdot 0.8^4 = 0.472$$

Uppgift 6

Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler där $X \in N(2, 3)$ och $Y \in N(4, 2)$.

Dvs. X har väntevärdet 2 och standardavvikelsen 3,

medan Y har väntevärdet 4 och standardavvikelsen 2. Låt $Z = X - 2Y$. Beräkna $P(Z > 4)$.

Eftersom Z är en linjärkombination av oberoende Normalfördelade stokastiska variabler, så är Z även Normalfördelad.

$$E(Z) = E(X) - 2E(Y) = 2 - 2 \cdot 4 = -6$$

$$V(Z) = V(X) + 4V(Y) = 9 + 16 = 25 \Rightarrow D(Z) = 5$$

$$P(Z > 4) = P\left(\frac{Z + 6}{5} > \frac{4 + 6}{5}\right) = [W = \frac{Z + 6}{5} \in N(0, 1)] = P(W > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 = 0.023$$

Uppgift 7

$X \in U(0, \theta)$ och $Y \in U(0, 2\theta)$. Antag att vi erhållit stickprovet x_1, x_2, x_3, x_4 som utfall av X och att vi erhållit stickprovet y_1, y_2, y_3, y_4 som utfall av Y .

Vi sätter $\theta_{\text{obs}}^* = 2\bar{x}$ och $\hat{\theta}_{\text{obs}} = \bar{y}$

$$E(\theta^*) = E(2\bar{X}) = 2E(X) = 2 \cdot \frac{0 + \theta}{2} = \theta$$

$$E(\hat{\theta}) = E(\bar{Y}) = E(Y) = \frac{0 + 2\theta}{2} = \theta$$

Således är båda skattningarna väntevärdesriktiga.

$$V(\theta^*) = V(2\bar{X}) = 4V(\bar{X}) = 4 \frac{V(X)}{4} = \frac{(\theta - 0)^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$$

$$V(\hat{\theta}) = V(\bar{Y}) = \frac{V(Y)}{4} = 0.25V(Y) = 0.25 \frac{(2\theta - 0)^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$$

Eftersom $V(\theta^*) = V(\hat{\theta})$, så är båda skattningarna lika effektiva.

Uppgift 8

Då standardavvikelserna är okända och lika fås m.h.a §12.2 och §11.2 det tvåsidiga konfidensintervallet till

$$I_{\mu 1-\mu 2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(f)s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Där man m.h.a §11.2 får

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 143.66^2 + 3 \cdot 73.627^2}{3 + 3}} = 114.147$$

Det ensidigt uppåt begränsade konfidensintervallets övre gräns blir

$$\begin{aligned} & \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \\ &= 1007.25 - 817.75 + t_{0.05}(6) \cdot 114.147 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 189.5 + 1.94 \cdot 114.147 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 346.1 \end{aligned}$$

Uppgift 9

Låt X vara antalet samtal som inkommer under 30 dagar. $X \in Po(30\mu)$. Observationen $x = 286$. X är appr. $N(30\mu, \sqrt{30\mu})$ om $30\mu > 15$. Då 30μ lämpligen skattas med 286 så torde villkoret vara uppfyllt med god marginal.

§12.3 ger då

$$I_{30\mu} = 30\mu_{obs}^* \pm \lambda_{0.025} D^*(30\mu^*)_{obs}$$

Detta ger konfidensintervallet

$$I_{30\mu} = 30\mu_{obs}^* \pm \lambda_{0.025} \sqrt{30\mu_{obs}^*} = 286 \pm 1.96 \cdot \sqrt{286} = 286 \pm 33.147$$

för parametern 30μ och således fås konfidensintervallet

$$I\mu = \mu_{obs}^* \pm \lambda_{0.025} \frac{\sqrt{30\mu_{obs}^*}}{30} = 9.53 \pm 1.10 = \underline{(8.43, 10.63)}$$

för den efterfrågade parametern μ .

Uppgift 10

§12.4 och §11.1 ger att den övre gränsen i ett konfidensintervall för σ blir

$$\sqrt{\frac{f}{\chi_{1-\alpha/2}^2(f)}} s \quad f = n - 1$$

Då $n = 41$ och $\alpha = 0.05$, blir $f = 40$ och $\chi_{0.975}^2(40) = 24.4$. Eftersom $s = 0.023$ blir den övre gränsen

$$\sqrt{\frac{f}{\chi_{\alpha/2}^2(f)}} s = \sqrt{\frac{40}{24.4}} 0.023 = 0.029$$

Uppgift 11

P-vädet hos testet är $P(\text{förkasta } H_0)$ om H_0 är sann, givet det värde på testvariabeln vi fått eller ett ännu mer avvikande. Dvs vi ska räkna ut $PX < 1.2$) om $\lambda = 0.2$.

$X \in \text{Exp}(\lambda)$ så vi ska räkna ut

$$\int_0^{1.2} f_X(x) dx = \int_0^{1.2} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

om $\mu = 0.2$ dvs om $\lambda = 1/5$.

$$\int_0^{1.2} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} dx = [1 - e^{-\frac{1}{5}x}]_0^{1.2} = 1 - e^{-0.24} = 0.21$$

Uppgift 12

Vi har

$$L(m) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)f_{X_3}f_{X_4}(x_4) = \frac{1}{(2m)^4} \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^4 |x_j|\right),$$

vilket ger

$$\ln L(m) = -4 \ln 2 - 4 \ln m - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^4 |x_j|.$$

Således får vi

$$\frac{d \ln L(m)}{dm} = -\frac{4}{m} + \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^4 |x_j| = -\frac{4}{m^2} \left(m - \frac{\sum_{j=1}^4 |x_j|}{4} \right).$$

$$\frac{d \ln L(m)}{dm} = 0 \text{ ger ML-skattningen } m_{obs}^* = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 |x_j|.$$

$$m_{obs}^* = (|-3.7| + |4.6| + |-1.1| + |0.2|)/4 = 2.4$$

Del II, Lösningsförslag

Uppgift 13

Av fyra tillverkade enheter, kan två på varandra följande felaktiga enheter uppkomma på fyra sätt:

A: De två första enheterna är felaktiga.

B: Den första är korrekt men den andra och den tredje enheten är felaktig.

C: De två första är korrekta, men de två sista är felaktiga.

D: Den första är fel, den andra är korrekt och de två sista är felaktiga.

A , B , C och D är disjunkta. $P(A) = 0.1^2 = 0.01$ och $P(B) = 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.009$, $P(C) = 0.9^2 \cdot 0.1^2 = 0.0081$ och $P(D) = 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.0009$ varför den sökta sannolikheten blir $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = \underline{0.028}$.

Uppgift 14

Sannolikheten att en viss dimerbindning brister inom ett dygn är $p = 1 - e^{-1/90} = 0.01105$. Låt X vara antalet bindningar som brister inom 1 dygn. X är således $\text{Bin}(49999, 0.01105)$ -fördelat. Eftersom $np(1-p) \approx 550 \geq 10$ så är X approximativt

$$N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(552.49, \sqrt{546.38})\text{-fördelat.}$$

Detta ger

$$P(X > 500) \approx 1 - \Phi\left(\frac{500 - 552.49}{\sqrt{546.38}}\right) = \Phi\left(\frac{52.49}{23.37}\right) = \Phi(2.25) = \underline{0.988}$$

Uppgift 15

Linjär regression (formelsamlingen §13). Vi låter y_i = kvävehalt år nr i , $i = 1, 2, \dots, 7$ som vi ser som utfall av Y_i som är $N(\alpha + \beta(x_i), \sigma)$. Vi skattar β med

$$\beta_{obs}^* = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7 \cdot \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}$$

och α med $\alpha_{obs}^* = \bar{y} - \beta_{obs}^* \cdot \bar{x}$. Vi får

$$\bar{x} = 2012, \bar{y} = 0.72, \sum_i x_i y_i = 10149.61, \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = 192 \text{ och } \sum_i y_i^2 = 4.1252$$

som ger

$$\beta_{obs}^* = \frac{10149.61 - 7 \cdot 2012 \cdot 0.72}{192} = \frac{9.13}{192} = 0.0476$$

och $\alpha_{obs}^* = 0.72 - 0.0476 \cdot 2012 = -95.0512$.

Den årliga förändringen av kvävehalten är β och vi får alltså konfidensintervallet (enligt formelsamlingen 13.2 andra intervallet) till

$$\beta_{obs}^* \pm t_{0.025}(7-2) \frac{s}{\sqrt{192}}$$

. Vi får σ -skattningen

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{Q_0}{7-2} = \frac{1}{5} \left(\sum_i (y_i - \bar{y})^2 - (\beta_{obs}^*)^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(\sum_i y_i^2 - 7 \cdot (\bar{y})^2 - (\beta_{obs}^*)^2 \cdot 192 \right) = \\ &= \frac{1}{5} (4.1252 - 7 \cdot 0.72^2 - 0.0476^2 \cdot 192) = 0.0124 \end{aligned}$$

och konfidensintervallet för β blir

$$0.0476 \pm 2.57 \sqrt{\frac{0.0124}{192}} = \underline{0.0476 \pm 0.0207}.$$

Uppgift 16

Låt A_i =Intervall i innehåller ej parametern, för $i = 1, 2$. Vi har $P(A_1) = P(A_2) = \alpha$ enligt texten.

Vi söker sannolikheten att båda intervallen innehåller respektive parameter, dvs

$$P(A_1^* \cap A_2^*) = 1 - P((A_1^* \cap A_2^*)^*) = 1 - P(A_1 \cup A_2).$$

a) Skulle intervallen vara oberoende (dvs att A_1 och A_2 är oberoende) erhåller vi konfidensgraden till

$$P(A_1^* \cap A_2^*) = P(A_1^*)P(A_2^*) = (1 - \alpha)(1 - \alpha) = \underline{1 - 2\alpha + \alpha^2}.$$

b) Man inser lätt ur en figur att $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$ och vidare att $\max(P(A_1), P(A_2)) \leq P(A_1 \cup A_2)$ och att alltså

$$\alpha \leq P(A_1 \cup A_2) \leq \alpha + \alpha = 2\alpha$$

som ger

$$1 - 2\alpha \leq P(A_1^* \cap A_2^*) \leq 1 - \alpha$$

dvs att konfidensgraden ligger mellan $1 - 2\alpha$ och $1 - \alpha$.