



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK,
ONSDAG 4 JUNI 2025 KL 08.00–13.00

Examinator: Björn-Olof Skytt, tel 08-790 8649.

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II. Del I består av uppgifterna 1-12. På denna del skall endast svar anges, antingen i form av ett numeriskt värde med tre värdesiffrors noggrannhet eller i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen. Svaren anges på svarsblanketten.

Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1-3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen behöver ej besvara uppgift 12, utan får tillgodoräkna sig denna uppgift (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Detta gäller endast på ordinarie tentan i mars 2024 och vid omtentamen i juni 2024. Gränsen för godkänt är 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 8 poäng.

Del II består av uppgifterna 13-16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på eller får komplettera del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del skall resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar skall förklaras och definieras och numeriska svar skall anges med minst två värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen får 3 bonuspoäng på del II på ordinarie tentamenstillfället och vid omtentamen i juni 2024.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

För händelserna A och B gäller att $P(A|B) = 0.8$, $P(B|A) = 0.4$, $P(B) = 0.2$. Bestäm $P(A \cup B)$.

A: 0.32

B: 0.44

C: 0.50

D: 0.76

Uppgift 2

I en urna ligger 25 kulor, 10 är röda och resten är svarta. Vad är sannolikheten att få exakt 2 röda kulor i urvalet om du UTAN återläggning och på måfå väljer 5 kulor?

A: 0.327

B: 0.346

C: 0.385

D: 0.771

Uppgift 3

Låt X vara en stokastisk variabel med fördelningsfunktionen $F_X(x)$. Låt $Y = 2 \ln(2X)$. Bestäm fördelningsfunktionen $F_Y(y)$ för Y .

A: $F_Y(y) = F_X(\frac{1}{2}e^{y/2})$

B: $F_Y(y) = \frac{1}{2}F_X(\frac{1}{2}e^{y/2})$

C: $F_Y(y) = \frac{1}{2}e^{y/2}F_X(\frac{1}{2}e^{y/2})$

D: $F_Y(y) = \frac{1}{4}e^{y/2}F_X(\frac{1}{2}e^{y/2})$

Uppgift 4

Låt X och Y vara stokastiska variabler sådana att $V(X) = 2$, $V(Y) = 3$, och kovariansen mellan X och Y är $C(X, Y) = -5$. Bestäm $V(5X - 4Y)$.

A: 18

B: 82

C: 102

D: 298

Uppgift 5

En person som har sex skott i sin pistol börjar skjuta mot målen

A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 .

Först skjuter hon mot A_1 tills hon träffar, sedan skjuter hon mot A_2 tills hon träffar osv.

Träffsannolikheten är 40% i varje skott och resultaten i varje skott är oberoende.

Beräkna sannolikheten att hon träffar A_3 med sitt sjätte skott.

A: 0.083

B: 0.138

C: 0.166

D: 0.276

Uppgift 6

X och Y är oberoende och Normalfördelade $N(2, 3)$ respektive $N(1, 4)$. Dvs. X har väntevärde 2 och standardavvikelse 3, medan Y har väntevärde 1 och standardavvikelse 4.

Beräkna talet a så att $P(2X - Y \geq a) = 0.05$.

A: 6.68

B: 10.36

C: 11.22

D: 14.86

Uppgift 7

Låt $X_1, \dots, X_{10}$ vara oberoende stokastiska variabler som är $Po(\mu)$ -fördelade. Parametern $\mu > 0$ är okänd. Vi betraktar två stickprovsvariabler μ^* och $\hat{\mu}$ av μ som ges av

$$\mu^*(X_1, \dots, X_{10}) = \frac{1}{10} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10})$$

respektive

$$\hat{\mu}(X_1, \dots, X_{10}) = \frac{1}{10} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + 2X_{10})$$

Vilket påstående är sant?

- A: μ_{obs}^* är den effektivaste skattningen av μ .
- B: $\hat{\mu}_{\text{obs}}$ är den effektivaste skattningen av μ .
- C: Bägge skattningarna är lika effektiva.
- D: Man kan inte avgöra vilken av skattningarna som är effektivast, eftersom minst en av dem inte är väntevärdesriktig.

Uppgift 8

Mätresultaten $x_1 = 0.24, x_2 = 0.40, x_3 = 0.90$ är utfall av oberoende stokastiska variabler X_1, X_2, X_3 med väntevärde $1/b^2, 2/b^2$ resp $3/b^2$ men med samma varians, där $b > 0$ är en parameter.

Bestäm Minsta-Kvadrat-skattningen av b .

- A: 1.93
- B: 2.00
- C: 2.07
- D: 2.19

Uppgift 9

Man önskar studera om bastubad verkar avstressande. För sju försökspersoner mättes därför adrenalinhalten (i lämplig enhet) dels innan och dels efter det att de badat bastu. Nedanstående mätvärden erhöles då:

Person nr	1	2	3	4	5	6	7
Adrenalinhalt innan bastubad	75	84	63	76	74	68	70
Adrenalinhalt efter bastubad	74	81	65	73	74	67	66

Vi antar följande modell: Mätvärdet för person nr k innan bastubadet (respektive efter bastubadet) uppfattas som ett utfall av en stokastisk variabel som är $N(\mu_k, \sigma_1)$ -fördelad respektive $N(\mu_k - \Delta, \sigma_2)$ -fördelad.

Beräkna ett tvåsidigt 95% igt konfidensintervall för Δ och ange nedre gränsen.

A: -0.079

B: -0.488

C: -5.094

D: -5.694

Uppgift 10

Låt $X \in \text{Bin}(80, p)$. Vi har utfallet $x = 62$. Ange nedre gränsen för det ensidigt nedåt begränsade konfidensintervallet för p som har den approximativa konfidensgraden 90%.

A: 0.240

B: 0.698

C: 0.715

D: 0.772

Uppgift 11

Låt $X \in \text{Po}(\mu)$ och vi testar $H_0 : \mu = 4$. Vi förkastar H_0 om $x \geq 8$. Vi får utfallet $\bar{x} = 10$. Bestäm styrkan hos testet för alternativet $H_1 : \mu = 8$.

A: 0.01

B: 0.05

C: 0.29

D: 0.55

Uppgift 12

I ett avancerat växthus utförs ett experiment för att avgöra om mängden belysning påverkar hur mycket jordgubbar växer. Belysningen mäts med hjälp av ett belysningsindex och jordgubbarnas vikt mäts i gram. De första fyra erhållna observationerna följer nedan.

Belysningsindex	5	12	14	20
Jordgubbsvikt (g)	18	25	35	45

Det är rimligt att tro att det föreligger ett linjärt samband mellan variablerna. Utifrån datamaterialet ovan skattas en linjär regressionsmodell

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 4,$$

där y_i = jordgubbsvikten (g) beror av x_i = belysningsindex och ε_i betecknar slumpmässiga fel. Man önskar testa nollhypotesen $H_0 : \beta = 0$ mot $H_1 : \beta \neq 0$ och får P -värdet till 0.032.

Vi bildar också ett 95%-igt konfidensintervall I_β för den effekt som belysningindex har på jordgubbsvikten.

Vilket av följande påståenden är sant?

- A: $0 \in I_\beta$ och vi kan därmed inte förkasta att jordgubbsvikten är linjärt beroende av belysningsindex på risknivån 5%.
- B: $0 \notin I_\beta$ och vi kan därmed inte förkasta att jordgubbsvikten är linjärt beroende av belysningsindex på risknivån 5%.
- C: $0 \in I_\beta$ och vi kan därmed förkasta att jordgubbsvikten är linjärt beroende av belysningsindex på risknivån 5%.
- D: $0 \notin I_\beta$ och vi kan därmed förkasta att jordgubbsvikten är linjärt beroende av belysningsindex på risknivån 5%.

Del II

Uppgift 13

En Geigermätare används för att registrera radioaktiva sönderfall. Varje sådant sönderfall ger upphov till ett Poissonfördelat antal strömpulser där väntevärdet i Poissonfördelningen är 3. Antalet strömpulser för de olika sönderfallen är oberoende av varandra. Man vet att det antingen sker 1 sönderfall (med sannolikhet 0.3) eller 2 sönderfall (med sannolikhet 0.7).

Beräkna (de betingade) sannolikheterna för att det varit 1 resp. 2 sönderfall om man registrerar 4 strömpulser. (10 p)

Uppgift 14

En märkt atom rör sig bland heltalspunkterna i R^3 (ett kubiskt gitter). Förflyttningen sker varje gång genom hopp till en av de närmaste 6 heltalspunkterna

$(x, y, z,) = (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)$ varje gång med lika sannolikhet $1/6$ för alla 6 punkterna.

Beräkna med väl motiverad approximation sannolikheten att atomen efter 300 hopp skall ha förflyttat sig minst 20 atomavståndsenheter i x-led från startpunkten. (10 p)

Uppgift 15

Livslängden av en viss slags elkomponent antages vara exponentialfördelad med väntevärdet μ timmar. Av n komponenter som kopplades in samtidigt visade sig x stycken fungera efter T timmar.

Bestäm ett konfidensintervall för μ med approximativ konfidensgrad 95% när $n = 100$, $x = 90$, och $T = 1000$ timmar. (10 p)

Uppgift 16

Man undersökte 378 gummiplattor med avseende på gummihalten (i procent).Följande resultat erhöles:

Klass	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9
Klassmitt	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5
Frekvens:	1	1	2	33	139	155	42	5

Undersök på signifikansnivån 5% om gummihalten kan anses vara normalfördelad eller ej. (10 p)

Lycka till!



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG
TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK,
ONSDAG 4 JUNI 2025 KL 8.00–13.00.

Del I, Svar

1. B
2. C
3. A
4. D
5. B
6. D
7. A
8. A
9. B
10. C
11. D
12. B

Del I, Lösningsförslag**Uppgift 1**

$$P(A|B) = 0.8, P(B|A) = 0.4, P(B) = 0.2.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B|A)} = \frac{0.16}{0.4} = 0.4$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = 0.4 + 0.2 - 0.16 = 0.44$$

Uppgift 2

Låt X vara antalet röda kulor vi drar. Då gäller att $X \in \text{Hyp}(25, 5, 0.4)$.

$$p_X(2) = \frac{\binom{10}{2} \binom{15}{3}}{\binom{25}{5}} = \frac{45 \cdot 455}{53130} = 0.835$$

Uppgift 3

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2\ln(2X) \leq y) = P(\ln(2X) \leq \frac{y}{2}) = P(2X \leq e^{\frac{y}{2}}) = P(X \leq \frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}}) = F_X(\frac{1}{2}e^{\frac{y}{2}})$$

Uppgift 4

$$\begin{aligned} V(5X - 4Y) &= V(5X) + V(-4Y) + 2C(5X, -4Y) = 25V(X) + 16V(Y) + 2C(5X, -4Y) = \\ &= 25V(X) + 16V(Y) + 2 \cdot 5 \cdot (-4)C(X, Y) = 25 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot (-4) \cdot (-5) = 298 \end{aligned}$$

Uppgift 5

Det som ska hända är att hon först ska få två träffar och tre missar på de fem första skotten och sedan en träff på det sjätte.

Vi inför X = antalet träffar de fem första skotten. Då gäller att $X \in \text{Bin}(5, 0.4)$ och då gäller att

$$p_X(2) = \binom{5}{2} 0.4^2 (1 - 0.4)^{5-2} = 10 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3$$

Nu ska detta multipliceras med 0.4 och då fås $0.4 \cdot 10 \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3 = 0.138$

Uppgift 6

$Z = 2X - Y$ är Normalfördelad eftersom X och Y är oberoende och Normalfördelade.

$$E(Z) = 2E(X) - E(Y) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$V(Z) = 2^2V(X) + (-1)^2V(Y) = 4 \cdot 3^2 + 4^2 = 52$$

$$P(Z \geq a) = P\left(\frac{Z - 3}{\sqrt{52}} \geq \frac{a - 3}{\sqrt{52}}\right) = 0.05 \Rightarrow \frac{a - 3}{\sqrt{52}} = \lambda_{0.05} \Rightarrow a = 3 + 1.6449\sqrt{52} = 14.86$$

Uppgift 7

Eftersom alla X_i na är $Po(\mu)$ -fördelade så gäller att $E(X_i) = V(X_i) = \mu$

$$E(\mu^*) = E(X_1, \dots, X_{10}) = E\left(\frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10})\right) =$$

$$= \frac{1}{10}(E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10})) = \frac{1}{10}(\mu + \mu + \dots + \mu) = \mu$$

$$E(\hat{\mu}) = E(X_1, \dots, X_{10}) = E\left(\frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + 2X_{10})\right) =$$

$$= \frac{1}{10}(E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_8) + 2E(X_{10})) = \frac{1}{10}(\mu + \mu + \dots + \mu + 2\mu) = \mu$$

Alltså är båda skattningarna väntevärdesriktiga.

$$V(\mu^*) = V(X_1, \dots, X_{10}) = V\left(\frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10})\right) =$$

$$= \frac{1}{100}(V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10})) = [X_i\text{na är oberoende}] =$$

$$= \frac{1}{100}(V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_{10})) = \frac{1}{100}(\mu + \mu + \dots + \mu) = \frac{10\mu}{100} =$$

$$= V(\hat{\mu}) = V(X_1, \dots, X_{10}) = V\left(\frac{1}{10}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + 2X_{10})\right) =$$

$$= \frac{1}{100}(V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_8) + 2^2V(X_{10})) = \frac{1}{100}(\mu + \mu + \dots + \mu + 4\mu) = \frac{12\mu}{100}$$

$V(\mu^*) < V(\hat{\mu})$ Alltså är μ_{obs}^* den effektivaste skattningen av de två.

Uppgift 8

Minsta-kvadratskattningen av b är det värde på b som minimerar

$$Q(b) = \sum_{i=1}^3 (x_i - E(X_i))^2 = \left(x_1 - \frac{1}{b^2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{2}{b^2}\right)^2 + \left(x_3 - \frac{3}{b^3}\right)^2.$$

Lösning av $0 = \frac{d}{db}Q(b)$ ger

$$0 = \frac{2^2}{b^3} \left(x_1 - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{2^2 \cdot 2}{b^3} \left(x_2 - \frac{2}{b^2}\right) + \frac{2^2 \cdot 3}{b^3} \left(x_3 - \frac{3}{b^3}\right) = \frac{4}{b^3} \left((x_1 + 2x_2 + 3x_3) - \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{b^2}\right)$$

med lösningen

$$b = \sqrt{\frac{14}{x_1 + 2x_2 + 3x_3}} = \sqrt{\frac{14}{0.24 + 2 \cdot 0.40 + 3 \cdot 0.90}} = 1.93.$$

Alltså MK-skattningen av b är $b_{obs}^* = \sqrt{14/(x_1 + 2x_2 + 3x_3)} = 1.93$.

Uppgift 9

Vi har här stickprov i par med $Z_i = X_i - Y_i \in N(\Delta, \sigma_z)$.

Person nr	1	2	3	4	5	6	7
Adrenalinhalt innan bastubad: x_i	75	84	63	76	74	68	70
Adrenalinhalt efter bastubad: y_i	74	81	65	73	74	67	66
$z_i = x_i - y_i$	1	3	-2	3	0	1	4

Med hjälp av §12.2 och §11.1d fås konfidensintervallet för Δ till

$$I_\Delta = \bar{z} \pm \frac{s_z}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \frac{10}{7} \pm \frac{s_z}{\sqrt{7}} t_{0.025}(6) = \frac{10}{7} \pm \frac{s_z}{\sqrt{7}} \cdot 2.45$$

$$s_z^2 = [\text{enligt §8 i F.S.}] = \frac{1}{6} \left[40 - \frac{1}{7}(10^2) \right] \Rightarrow I_\Delta = 1.439 \pm 1.917$$

Alltså blir nedre gränsen $= -0.478$.

Uppgift 10

§12.3 används här: $I_\theta = \theta_{obs}^* \pm D_{obs}^* \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$

$$X \in \text{Bin}(80, p) \Rightarrow p_{obs}^* = \frac{x}{n} = \frac{62}{80} = 0.775.$$

$$V(p^*) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{V(X)}{n^2}$$

Eftersom X är Binomialfördelad så är $V(X) = np(1-p)$ (Se §3 i F.S.)

Detta leder till att

$$V(p^*) = \frac{p(1-p)}{n}$$

vilket i sin tur leder till att medelfelet blir

$$D_{obs}^*(p^*) = \sqrt{\frac{p_{obs}^*(1-p_{obs}^*)}{n}} = \sqrt{\frac{p_{obs}^*(1-p_{obs}^*)}{n}} = \sqrt{\frac{0.775(1-0.775)}{80}} \approx 0.0467$$

Vi får då det tvåsidiga konfidensintervallet till

$$I_p = p_{obs}^* \pm \sqrt{\frac{p_{obs}^* \cdot (1-p_{obs}^*)}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Då blir det ensidigt nedåt begränsade konfidensintervallet

$$\begin{aligned} I_p &= (p_{obs}^* - \sqrt{\frac{p_{obs}^* \cdot (1-p_{obs}^*)}{n}} \cdot \lambda_{\alpha}, \infty) = \left(\frac{62}{80} - \sqrt{\left(\frac{\frac{62}{80} \cdot (1-\frac{62}{80})}{80}\right)} \cdot \lambda_{0.10}, \infty\right) = \\ &= \left(\frac{62}{80} - \sqrt{\left(\frac{\frac{62}{80} \cdot (1-\frac{62}{80})}{80}\right)} \cdot 1.2816, \infty\right) = (0.715, \infty) \end{aligned}$$

Uppgift 11

Styrkan hos testet är sannolikheten att förkasta nollhypotesen om mothypotesen är sann. Dvs.

$$P(\text{Förkasta } H_0) \text{ om } H_1 \text{ är sann} = P(X \geq 8) \text{ om } \mu = 8.$$

Vi tittar i tab 5 som ger $P(X \leq 7)$ om $X \in Po(8)$ och får 0.45296

$$\text{Dvs. styrkan är } 1 - 0.45296 \approx 0.55$$

Uppgift 12

Eftersom p-värdet $= 0.032 < 0.05$, så kan vi förkasta $H_0: \beta = 0$ Dvs. $0 \notin I_\beta$ och vi kan därmed inte förkasta att jordgubbsvikten är linjärt beroende av belysningsindex på risknivån 5%. Alltså är B rätt svar.

Del II, Lösningsförslag**Uppgift 13**

Låt X vara antalet sönderfall och Y antalet strömpulser, där utfallet $y = 4$ observerades. Om $X = 1$ så är

$$P(Y = 4|X = 1) = \frac{\mu^4}{4!}e^{-\mu} = \frac{3^4}{4!}e^{-3} = 0.1680.$$

Om $X = 2$ så är Y en summa av två oberoende Poissonfördelade stokastiska variabler, dvs Y är $Po(2\mu)$ -fördelad och

$$P(Y = 4|X = 2) = \frac{(2\mu)^4}{4!}e^{-2\mu} = \frac{6^4}{4!}e^{-6} = 0.1339.$$

Nu är enligt lagen om total sannolikhet

$$P(Y = 4) = P(Y = 4|X = 1)P(X = 1) + P(Y = 4|X = 2)P(X = 2) = 0.144$$

dvs

$$P(X = 2|Y = 4) = \frac{P(Y = 4|X = 2)P(X = 2)}{P(Y = 4)} = \frac{0.134 \cdot 0.7}{0.144} = 0.650$$

och $P(X = 1|Y = 4) = 1 - P(X \neq 1|Y = 4) = 1 - P(X = 2|Y = 4) = 1 - 0.650 = 0.345$.

Uppgift 14

Låt X_i vara förflyttningen efter ett hopp.

$$E(X_i) = \sum k p_X(k) = -1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{4}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$E(X_i^2) = \sum k^2 p_X(k) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 0^2 \cdot \frac{4}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1}{3}$$

X_i :na är många, ober, och likafördelade $\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{300} X_i$ är approximativt $N(nE(X_i), \sqrt{n}D(X_i))$

$$\Rightarrow Y \approx N(300 \cdot 0, \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{300}}) = N(0, 10)$$

$$P(|Y| \geq 20) \approx 1 - P(-20 \leq Y \leq 20) = [\text{Gör om till } Z \in N(0, 1)] = 1 - P(-2 \leq Z \leq 2) =$$

$$= 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] = 2 - 2\Phi(2) = 2(1 - 0.97725) \approx 0.046$$

alternativt: $P(|Y| > 19) \approx 2 - 2\Phi(1.9) \approx 0.057$

eller med halvkorrektion: $P(|Y| > 19.5) \approx 2 - 2\Phi(1.95) \approx 0.051$

Uppgift 15

Låt den stokastiska variabeln X vara det antal komponenter som har en livslängd $> T$.

Då gäller att $X \in \text{Bin}(n, p)$.

Låt den stokastiska Y vara livslängden hos en enskild komponent.

Då gäller att $Y \in \text{Exp}(\lambda) = \text{Exp}(\frac{1}{\mu})$.

$$p = P(Y > T) = \int_T^\infty \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} dt = e^{-\frac{T}{\mu}}$$

Låt oss börja med att bilda ett konfidensintervall för p på samma sätt som i uppgift 10.

Vi får då det tvåsidiga konfidensintervallet till

$$I_p = p_{obs}^* \pm \sqrt{\frac{p_{obs}^* \cdot (1 - p_{obs}^*)}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = \left(p_{obs}^* - \sqrt{\frac{p_{obs}^* \cdot (1 - p_{obs}^*)}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}, p_{obs}^* + \sqrt{\frac{p_{obs}^* \cdot (1 - p_{obs}^*)}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\text{Sätt nu } p = e^{-\frac{T}{\mu}} \Rightarrow \ln p = -\frac{T}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{-T}{\ln p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_\mu = \left(\frac{-T}{\ln(p_{obs}^* - \sqrt{\frac{p_{obs}^* \cdot (1 - p_{obs}^*)}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}})}, \frac{-T}{\ln(p_{obs}^* + \sqrt{\frac{p_{obs}^* \cdot (1 - p_{obs}^*)}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}})} \right)$$

$$\text{där } p_{obs}^* = \frac{x}{n} \text{ och } np_{obs}^*(1 - p_{obs}^*) = 100 \cdot \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{100} = 9 \text{ (nästan 10)}$$

$$I_\mu = (5783, 23768)$$

Uppgift 16

Klass	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9
Klassmitt	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5
Frekvens:	1	1	2	33	139	155	42	5

Här har vi test av given fördelning eftersom nollhypotesen är att vi har en viss fördelning. Se §14.3 i Formelsamlingen. I detta fall har vi alltså H_0 : de stokastiska variablerna Y_i kommer från en Normalfördelning $N(\mu, \sigma)$, där y_i är den observerade gummihalten i platta i .

$$Q = \sum_{i=1}^r \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i}$$

x_i är antalet observerade värden i klass i och p_i är sannolikheten att en observation skall hamna i klass i .

För att kunna skatta p_i :na skattar vi μ med $\bar{x}$ och σ med roten ur stickprovsvariansen s^2 och vi räknar som om alla observationerna i klassen har klassmitten värde.

$$\mu_{obs}^* = \bar{x} = \frac{1.5 + 2.5 + 2 \cdot 3.5 + 33 \cdot 4.5 + 139 \cdot 5.5 + 155 \cdot 6.5 + 42 \cdot 7.5 + 5 \cdot 8.5}{378} = \frac{2289}{378} \approx 6.06$$

$$s^2 = [\text{enligt §8 i F.S.}] = \frac{1}{378 - 1} [(1.5 - 6.06)^2 + (2.5 - 6.06)^2 + 2 \cdot (3.5 - 6.06)^2 + 33 \cdot (4.5 - 6.06)^2 +$$

$$+139 \cdot (5.5 - 6.06)^2 + 155 \cdot (6.5 - 6.06)^2 + 42 \cdot (7.5 - 6.06)^2 + 5 \cdot (8.5 - 6.06)^2] = \frac{317.3408}{377} = 0.84175$$

$$\sigma_{obs}^* = \sqrt{s^2} \approx 0.92$$

$$Dvs. Y_i \approx N(6.06, 0.92)$$

För att det ska vara gälla att alla $np_i \geq 5$ så slår vi ihop alla observationer ≤ 5 till en klass och får

$$P(Y \leq 5) = \Phi\left(\frac{5 - 6.06}{0.92}\right) = 0.1251 \Rightarrow np_1 = 378 \cdot 0.1251 = 47.3 \text{ och } x_1 = 1 + 1 + 2 + 33 = 37$$

$$P(Y \leq 6) - P(Y \leq 5) = \Phi\left(\frac{6 - 6.06}{0.92}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 6.06}{0.92}\right) = 0.4721 - 0.1251 = 0.347 \Rightarrow np_2 = 131.2 \text{ och } x_2 = 139$$

$$P(Y \leq 7) - P(Y \leq 6) = \Phi\left(\frac{7 - 6.06}{0.92}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 6.06}{0.92}\right) = 0.8461 - 0.4721 = 0.374 \Rightarrow np_3 = 141.4 \text{ och } x_3 = 155$$

$$P(Y \leq 8) - P(Y \leq 7) = \Phi\left(\frac{8 - 6.06}{0.92}\right) - \Phi\left(\frac{7 - 6.06}{0.92}\right) = 0.98257 - 0.8461 = 0.1365 \Rightarrow np_4 = 51.6 \text{ och } x_4 = 42$$

$$P(Y \geq 8) = 1 - 0.98257 = 0.01743 \Rightarrow np_5 = 6.59 \text{ och } x_5 = 5$$

$$Q = \frac{(47.3 - 37)^2}{47.3} + \frac{(131.2 - 139)^2}{131.2} + \frac{(141.4 - 155)^2}{141.4} + \frac{(51.6 - 42)^2}{51.6} + \frac{(6.59 - 5)^2}{6.59} = 6.19$$

Vi har 5 grupper och vi har skattat 2 parametrar (μ och σ) för att skatta p_i :na.,,,,

Då blir $\chi_\alpha^2(r - k - 1) = \chi_{0.05}^2(5 - 2 - 1) = 5.99$

$Q > \chi_{0.05}^2(2)$. Alltså förkastar vi H_0 på risknivån 5%.