



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1910,SF1925/SF1917,SF1919
TILLÄMPAD STATISTIK/SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK
TORSDAG 8 JANUARI 2026 KL 08.00–13.00.

Kursledare: Björn-Olof Skytt, 08-790 86 49

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II.

Del I består av uppgifterna 1–12 och varje korrekt svar ger 1 poäng. På denna del ska endast svar anges, i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen. Svaren ska anges på svarsblanketten (utdelas vid tentamen). Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1–3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter (i svarsblanketten anges ordet "Bonus"). Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen behöver ej besvara uppgift 12, utan får tillgodoräkna sig denna uppgift (i svarsblanketten anges ordet "Bonus"). Gränsen för godkänt är 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 8 poäng.

Del II består av uppgifterna 13–16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på eller får komplettera del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del ska resonemang och uträkningar vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar ska förklaras och definieras samt numeriska svar ska anges med minst tre värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen får 3 bonuspoäng på del II.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

Tyko och hans syskon har fått en ask marmeladkulor som julklapp. Det finns två smaker, den ena sorten är gröna kulor och den andra sorten är röda. Tykos mamma har givit honom lov att äta upp fyra kulor efter maten. Tyko vill väldigt gärna ha lika många röda som gröna kulor. Tyko tar fyra kulor ur asken på ett slumpmässigt sätt. Beräkna sannolikheten att Tykos önskan går i uppfyllelse om asken innehåller sex gröna och fyra röda kulor.

A: 0.071

B: 0.296

C: 0.375

D: 0.429

Uppgift 2

De diskreta stokastiska variablerna X och Y har den simultana sannolikhetsfunktionen

$p_{X,Y}(x, y)$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 1$	0.1	0.6
$y = 2$	0.1	0.2

Således antar X värdena 1 och 2, medan Y antar värdena 1 och 2.

Beräkna variansen $V(Y - X)$.

- A: 0.05
- B: 0.19
- C: 0.37
- D: 0.45

Uppgift 3

Låt $X_1, X_2, \dots, X_{49}$ vara oberoende stokastiska variabler som är $Exp(1)$ fördelade. Antag vidare att $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{49}$. Beräkna den approximativa sannolikheten $P(X > 50)$.

- A: 0.159
- B: 0.444
- C: 0.556
- D: 0.841

Uppgift 4

För många sjukdomar gäller att diagnosen inte alltid är säker. Dels kan en person med sjukdomen bli friskförklarad, dels kan en frisk person få diagnosen sjuk. Antag att en godtycklig person har en viss sjukdom med sannolikhet 0.07. Antag vidare att diagnosmetoden ger rätt resultat givet att personen är frisk med sannolikhet 0.72, och rätt resultat givet att personen är sjuk med sannolikhet 0.88. Hur stor är sannolikheten för att diagnosen blir korrekt?

- A: 0.2688
- B: 0.6696
- C: 0.7312
- D: 0.8688

Uppgift 5

De oberoende stokastiska variablerna X och Y är båda sådana att de är för-första-gången-fördelade med $p = \frac{1}{6}$, dvs. $X \in \text{ffg}(\frac{1}{6})$ och $Y \in \text{ffg}(\frac{1}{6})$. Låt $Z = \min(X, Y)$ (dvs. Z är det minsta värdet av X och Y). Bestäm $P(Z < 4)$.

A: 0.18

B: 0.33

C: 0.67

D: 0.82

Uppgift 6

Vi har två oberoende stokastiska variabler X och Y sådana att $X \in Po(1)$ och $Y \in Po(2)$. Bestäm $P(X + Y = 3)$

A: 0.119

B: 0.224

C: 0.353

D: 0.423

Uppgift 7

Låt X_i , $i = 1, 2, 3$ vara oberoende stokastiska variabler med väntevärde μ och standardavvikelse σ . Antag att μ skattas med $\mu_{obs}^* = (x_1 + x_2 + 2x_3)/4$ och σ skattas med stickprovsstandardavvikelsen s . Låt utfallen på X_i vara $x_1 = 5$, $x_2 = 9$ och $x_3 = 7$. Bestäm medelfelet för skattningen av μ .

A: 0.866

B: 1.22

C: 2.00

D: 2.45

Uppgift 8

Begreppet intelligens är operationellt definierat som resultatet av ett intelligenstest. För enkelhets skull antar vi att resultaten är oberoende och normalfördelade med samma standardavvikelse för alla individer i alla test. Man önskar undersöka om vana vid intelligenstest medför en förändring av testpoängen. För att pröva detta dras ett stickprov om 7 individer, vilka tidigare ej genomgått test. Dessa får genomgå prov på 6 test vardera, och nedan anges resultat på första och sista testet:

Individ nr	1	2	3	4	5	6	7
Första testet	108	142	121	138	112	102	91
Sista testet	106	146	122	140	117	104	94

Vi kan anta att resultaten från det första testet kommer från en normalfördelning $N(\mu_1, \sigma_1)$ och att resultaten från det sista testet kommer från en normalfördelning $N(\mu_1 + \Delta, \sigma_2)$. Bilda ett tvåsidigt konfidensintervall för Δ med konfidensgrad 95% och ange övre gränsen.

A: 3.81

B: 4.00

C: 4.24

D: 5.36

Uppgift 9

Låt $X_1 \in \text{Bin}(n, p)$ och $X_2 \in \text{Bin}(n, 10p)$ vara två oberoende stokastiska variabler. Parametern p är okänd (och kan antas väldigt liten). Vi betraktar två punktskattningar av p : p_{obs}^* och $\hat{p}_{\text{obs}}$ som ges av stickprovsvariablerna

$$p^* = \frac{X_1}{11} + \frac{X_2}{11} \text{ respektive } \hat{p} = \frac{X_2 - X_1}{9}$$

Vilket påstående är sant?

A: p_{obs}^* är den effektivaste skattningen av p .B: $\hat{p}_{\text{obs}}$ är den effektivaste skattningen av p .

C: Bägge skattningarna är lika effektiva.

D: Man kan inte avgöra vilken av skattningarna som är effektivast, eftersom minst en av dem inte är väntevärdesriktig.

Uppgift 10

Låt X vara en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärde μ . Med fem utfall på X får man $\bar{x} = 16$. Ange nedre gränsen till det ensidigt nedåt begränsade konfidensintervallet för μ med den approximativa konfidensgraden 95%.

A: 12.49

B: 13.06

C: 14.43

D: 14.68

Uppgift 11

Vi antar att $X \in \text{Exp}(\lambda)$ och testar nollhypotesen $H_0 : \lambda = 0.3$ mot mothypotesen $H_1 : \lambda = 0.2$ och får utfallet $x = 9$.

- A: Vi får p-värdet 0.067 och kan därför förkasta $H_0 : \lambda = 0.3$ på risknivån 5%
- B: Vi får p-värdet 0.067 och kan därför inte förkasta $H_0 : \lambda = 0.3$ på risknivån 5%
- C: Vi får p-värdet 0.165 och kan därför förkasta $H_0 : \lambda = 0.3$ på risknivån 5%
- D: Vi får p-värdet 0.165 och kan därför inte förkasta $H_0 : \lambda = 0.3$ på risknivån 5%

Uppgift 12

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot 5^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{om } x \geq 5 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

där $\alpha > 0$

Bestäm Maximum-Likelihood-skattningen för α givet stickprovet

$$x_1 = 5.65, x_2 = 7.20, x_3 = 6.10, x_4 = 9.20, x_5 = 5.34$$

- A: 0.56
- B: 1.6
- C: 3.7
- D: 17.1

Var god vänd!

Del II

Uppgift 13

Låt X vara antalet ensamma som checkar in på ett stort hotell under tiden t och låt Y vara antalet par som checkar in på samma hotell under tiden t . Tiden anges i minuter.

Låt $X \in Po(\lambda_1 t)$ och $Y \in Po(\lambda_2 t)$ där $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 1$. X och Y antas vara oberoende.

- a) Beräkna sannolikheten att det under ett tidsintervall av längd 1 minut anländer precis fyra personer. (5 p)
- b) Beräkna med välmotiverad approximation sannolikheten att minst 250 personer anländer under en timme. (5 p)

Uppgift 14

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{9-6x-6y+4xy}{4} & \text{om } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- a) Är X och Y oberoende? Svaret skall givetvis motiveras. (5 p)
- b) Bestäm $P(X + Y < 1)$ (5 p)

Uppgift 15

Vid ett försök att odla blommor av en viss typ erhöles 120 rosa med gröna stift, 48 rosa med röda stift, 36 röda med gröna stift och 13 röda med röda stift. Enligt botanisk teori skulle proportionerna vara $9 : 3 : 3 : 1$. Kan denna hypotes förkastas på risknivå 1% utifrån ovanstående mätdata. Ange dina hypoteser noga och motivera din slutsats. (10 p)

Uppgift 16

En stokastisk variabel är normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse $\sigma = 3$. Nollhypotesen $\mu = 10$ ska testas med hjälp av ett slumpmässigt stickprov om 16 observationer. Beslutsregeln är följande: förkasta nollhypotesen om $|\mu_{obs}^* - 10| > 1.23$ där $\mu_{obs}^* = \bar{x}$.

- a) Vilken signifikansnivå har detta test? (4 p)
- b) Bestäm styrkan hos detta test om $\mu = 11$. (6 p)

Lycka till!



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMEN I SF1910/SF1917/SF1919/SF1925
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
TORSDAG 8 JANUARI 2025 KL 8.00–13.00.

Del I, Svar.

1. D
2. D
3. B
4. C
5. C
6. B
7. B
8. C
9. D
10. B
11. B
12. C

Del I, Lösningsförslag.**Uppgift 1**

Låt X stå för antal gröna marmeladkulor vid urvalet. Eftersom Tyko äter upp kulorna drar vi kulorna utan återläggning. Om Tyko får två gröna kulor när han tar ut fyra kulor, så måste han få två gröna och två röda vilket är vad han önskar.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{6 \cdot 15}{210} = \frac{3}{7} = 0.429$$

Uppgift 2

Bilda först den stokastiska variabeln $Z = Y - X$

Då fås sannolikhetsfunktionen $p_Z(-1) = 0.6$, $p_Z(0) = 0.3$, $p_Z(1) = 0.1$

$V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z)$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n k p_Z(k) = -1 \cdot p_Z(-1) + 0 \cdot p_Z(0) + 1 \cdot p_Z(1) = -1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.1 = -0.5$$

$$E(Z^2) = \sum_{i=1}^n k^2 p_Z(k) = 1 \cdot p_Z(-1) + 0 \cdot p_Z(0) + 1 \cdot p_Z(1) = 1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.1 = 0.7$$

Således blir $V(Z) = 0.7 - (-0.5)^2 = 0.45$

Uppgift 3

Eftersom X_i :na är många, oberoende och likafördelade använder vi oss av Centrala Gränsvärdessatsen enligt §5 i F.S.

$$X = \sum_{i=1}^{49} X_i \text{ är då approximativt } N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

§4 i F.S. ger med $\lambda = 1$ att $\mu = 1$ och att $\sigma = 1$. Vi har nu att X är approximativt $N(49, 7)$.

$$P(X > 50) = [\text{Gör om till } N(0,1)] = P\left(\frac{X - 49}{7} > \frac{50 - 49}{7}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{7}\right) \approx \Phi(0.14) \approx 1 - 0.556 \approx 0.444$$

Uppgift 4

Inför händelserna R = rätt resultat, F = frisk, S = sjuk.

Vi använder oss av lagen om total sannolikhet.

$$P(R) = P(R|S)P(S) + P(R|F)P(F) = 0.88 \cdot 0.07 + 0.72 \cdot 0.93 = 0.7312$$

Uppgift 5

$$P(Z < 4) = P(\min(X, Y) < 4) = 1 - P(\min(X, Y) \geq 4) = 1 - P(X \geq 4 \cap Y \geq 4) \\ = [X \text{ och } Y \text{ är oberoende}] = 1 - P(X \geq 4)P(Y \geq 4)$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - (p_X(1) + p_X(2) + p_X(3)) = 1 - (p + p(1-p) + p(1-p)^2) = \\ = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) = 1 - \frac{91}{216} = \frac{125}{216}$$

$$\text{Detta ger att } P(Z < 4) = P(\min(X, Y) < 4) = 1 - \left(\frac{125}{216}\right)^2 = 0.67$$

Uppgift 6

$$X \in Po(1), Y \in Po(2), X \text{ och } Y \text{ är oberoende.} \Rightarrow Z = X + Y \in Po(3)$$

$$\text{Användning av tab 5} \Rightarrow P(Z = 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq 2) = 0.64723 - 0.42319 \approx 0.224$$

Uppgift 7

$$V(\mu_{\text{obs}}^*) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + 2X_3}{4}\right) \\ = \frac{1}{16} (V(X_1) + V(X_2) + 4V(X_3)) \\ = \frac{1}{16} (\sigma^2 + \sigma^2 + 4\sigma^2) \\ = \frac{3}{8}\sigma^2$$

Alltså blir

$$D(\mu_{\text{obs}}^*) = \sqrt{\frac{3}{8}} \sigma$$

Vi uppskattar σ med s , så att $d(\mu_{\text{obs}}^*) = \sqrt{\frac{3}{8}} s$.

Då $x_1 = 3, x_2 = 5$ och $x_3 = 7$ blir $\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 = 2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2$. Eftersom $n = 3$ blir $s^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 / 2 = 2^2$ och således $s = 2$. Alltså blir

$$d(\mu_{\text{obs}}^*) = \sqrt{\frac{3}{8}} s = \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot 2 = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.22$$

Uppgift 8

Här har vi parvisa jämförelser. Bilda differenser z_i inom individer (sista–första).

Nya data. $-2, 4, 1, 2, 5, 2, 3$

som är utfall av Z_i där Z_i :na oberoende och $N(\Delta, \sigma)$. $\bar{z} = \frac{1}{7}(-2+4+1+2+5+2+3) = 15/7 \approx 2.143$,
 $s_z^2 = \frac{1}{7-1}((-2)^2 + \dots + 3^2 - 15^2/7) \approx 5.14$ som ger $s_z \approx 2.27$.

Ett 95 % konfidensintervall för Δ blir

$$I_\Delta = \bar{z} \pm t_{0.025}(7-1) \cdot \frac{s_z}{\sqrt{7}} = 2.143 \pm 2.45 \cdot \frac{2.27}{\sqrt{7}} = 2.143 \pm 2.10$$

Alltså blir övre gränsen 4.24.

Uppgift 9

$$p^* = \frac{X_1}{11} + \frac{X_2}{11} \text{ och } \hat{p} = \frac{X_2 - X_1}{9}$$

$$E(p^*) = E\left(\frac{X_1}{11} + \frac{X_2}{11}\right) = (E(X_1) + E(X_2))\frac{1}{11} = \frac{np + 10np}{11} = np \neq p$$

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X_2 - X_1}{9}\right) = \frac{10np - np}{9} = np \neq p$$

Således är ingen av skattningarna väntevärdesriktig.

Uppgift 10

Här använder vi oss av §12.3.: $I_\theta = \theta_{obs}^* \pm D_{obs}^* \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$, men eftersom intervallet är ensidigt nedåt begränsat blir nedre gränsen $\theta_{obs}^* - D_{obs}^* \lambda_\alpha$.

I vårt fall är $\theta_{obs}^* = \mu_{obs}^* = \bar{x}$ och $D_{obs}^* = D_{obs}^*(\theta^*) = D_{obs}^*(\mu^*) = D_{obs}^*(\bar{X})$.

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X_1 + \dots + X_5)}{5} = [\text{oberoende}] = \frac{V(X_1) + \dots + V(X_5)}{5^2} = \frac{V(X_i)}{5} = \frac{\mu}{5}$$

Alltså blir

$$D_{obs}^* = \sqrt{\frac{\mu_{obs}^*}{5}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{5}}$$

Nedre gränsen blir då

$$\bar{x} - \sqrt{\frac{\bar{x}}{5}} \cdot \lambda_{0.05} = 16 - \sqrt{\frac{16}{5}} \cdot 1.6449 = 13.06$$

Uppgift 11

Definitionen av P-värde är $P(\text{förkasta } H_0) \text{ om } H_0 \text{ sann}$ och om vi har fått ett visst värde på testvariabeln vilket är $P(\text{få det observerade värdet eller något extremare värde} | H_0 \text{ sann})$.

Vi förkastar alltså H_0 till förmån för H_1 för avvikande höga värden på utfallet av X i vårt fall.

$$\Rightarrow P(X > 9) \text{ om } X \in \text{Exp}(0.3) = \int_9^\infty 0.3e^{-0.3x} dx = e^{-0.3 \cdot 9} = 0.0675$$

p-värdet är alltså lika med 0.067 som är större än 0.05. Alltså kan vi inte förkasta nollhypotesen på risknivån 5%.

Uppgift 12

Vi ska bestämma Maximum-Likelihood-skattningen för α givet stickprovet

$$x_1 = 5.65, x_2 = 7.20, x_3 = 6.10, x_4 = 9.20, x_5 = 5.34$$

Se §9.1. Vi har i vårt fall

$$L(\alpha) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)f_{X_3}(x_3)f_{X_4}(x_4)f_{X_5}(x_5) = \frac{\alpha \cdot 5^\alpha}{x_1^{\alpha+1}} \cdot \frac{\alpha \cdot 5^\alpha}{x_2^{\alpha+1}} \cdots \frac{\alpha \cdot 5^\alpha}{x_5^{\alpha+1}} = \frac{\alpha^5 \cdot 5^{5\alpha}}{(x_1 \cdot x_2 \cdots x_5)^{\alpha+1}}$$

vilket ger

$$\ln L(\alpha) = 5 \ln \alpha + 5\alpha \ln 5 - (\alpha + 1) \ln (x_1 \cdot x_2 \cdots x_5)$$

Således får vi

$$\frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = \frac{5}{\alpha} + 5 \ln 5 - \ln (x_1 \cdot x_2 \cdots x_5)$$

$$\frac{d \ln L(\alpha)}{d\alpha} = 0 \text{ ger ML-skattningen } \alpha_{obs}^* = \frac{5}{\ln (x_1 \cdot x_2 \cdots x_5) - 5 \ln 5} = 3.7$$

Del II, Lösningsförslag:**Uppgift 13**

a) Fyra personer kan anlända enligt tre olika möjligheter: 4 ensamma personer men inget par, 2 ensamma personer och ett par samt 0 ensamma personer och 2 par. Låt X vara antalet ensamma anlända personer Y vara antalet par. Vi får då att

$$\begin{aligned}
 &P(\{X = 4, Y = 0\} \cup \{X = 2, Y = 1\} \cup \{X = 0, Y = 2\}) \\
 &= P(X = 4, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) \\
 &= P(X = 4)P(Y = 0) + P(X = 2)P(Y = 1) + P(X = 0)P(Y = 2) \\
 &= e^{-2} \frac{2^4}{4!} e^{-1} \frac{1^0}{0!} + e^{-2} \frac{2^1}{1!} e^{-1} \frac{1^1}{1!} + e^{-2} \frac{2^0}{0!} e^{-1} \frac{1^2}{2!} = \underline{\underline{\frac{19}{6} e^{-3} \approx 0.158}}
 \end{aligned}$$

b) Låt nu X vara antalet ensamma personer som kommer under en timme och Y antalet par. Totala antalet personer som kommer under timme är då $X + 2Y$. Både X och Y är Poissonfördelade, $X \in \text{Po}(60 \cdot 2)$ och $Y \in \text{Po}(60 \cdot 1)$. Eftersom väntevärdena är större än 15 är $X \approx N(120, \sqrt{120})$ och $Y \approx N(60, \sqrt{60})$ och således $X + 2Y \approx N(120 + 2 \cdot 60, \sqrt{120 + 2^2 \cdot 60}) = N(240, \sqrt{360})$. härav får vi

$$P(X + 2Y \geq 250) \approx 1 - \Phi\left(\frac{250 - 240}{\sqrt{360}}\right) = 1 - \Phi(0.527) \approx \underline{\underline{0.30}}$$

Uppgift 14

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{9-6x-6y+4xy}{4} & \text{om } 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

a) X och Y är oberoende $\Leftrightarrow f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y)$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = [\text{i vårt fall}] = \int_0^1 \frac{9-6x-6y+4xy}{4} dy = \\ &= \left[\frac{9y-6xy-3y^2+2xy^2}{4} \right]_0^1 = \frac{9-6x-3+2x}{4} = \frac{6-4x}{4} \end{aligned}$$

På samma sätt fås p.g.a. symmetriskäl att

$$f_Y(y) = \frac{6-4y}{4}$$

$$\Rightarrow f_X(x)f_Y(y) = \frac{6-4x}{4} \cdot \frac{6-4y}{4} = \frac{36-24x-24y+16xy}{16} = \frac{9-6x-6y+4xy}{4} = f_{X,Y}(x, y)$$

Alltså är X och Y oberoende.

b)

$$\begin{aligned} P(X+Y < 1) &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \frac{9-6x-6y+4xy}{4} dx dy = \int_0^1 \left[\frac{9x-3x^2-6yx+2yx^2}{4} \right]_0^{1-y} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{9(1-y)-3(1-y)^2-6y(1-y)+2y(1-y)^2}{4} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{9-9y-3+6y-3y^2-6y+6y^2+2y-4y^2+2y^3}{4} dy = \int_0^1 \frac{6-7y-y^2+2y^3}{4} dy = \\ &= \left[\frac{6y-\frac{7y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{2}}{4} \right]_0^1 = \frac{6-\frac{7}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{4} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Uppgift 15

Vi har $n = 217$ observationer på multinomialfördelningen med fyra celler.

Hypoteser:

$$H_0 : P(A_1) = \frac{9}{16}, \quad P(A_2) = \frac{3}{16}, \quad P(A_3) = \frac{3}{16}, \quad P(A_4) = \frac{1}{16}.$$

$$H_1 : H_0 \text{ ej sann.}$$

Signifikansnivå: $\alpha = 0.01$.

Testvariabel: Testvariabeln

$$Q_{\text{obs}} = \sum_{j=1}^r \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j}$$

är approximativt χ^2 -fördelad med $(r - 1)$ frihetsgrader. Eftersom $r = 4$ har vi $(r - 1) = 3$ frihetsgrader. I formelsamlingen hittar vi $\chi_{0.01}^2(3) = 11.3$.

Beslutsregel: H_0 förkastas om $Q > 11.3$.

Resultat: χ^2 -metoden kan användas, ty för $np_4 = 217 \times \frac{1}{16} = 13.5627 > 5$ och alla övriga np_j är större. Ett sätt att utvärdera nollhypotesen är att göra en tabell över de förväntade frekvenserna och de observerade i varje cell:

	Magenta/Grön	Magenta/Röd	Röd/Grön	Röd/Röd
np_j	$217 \frac{9}{16} = 122.1$	$217 \frac{3}{16} = 40.7$	$217 \frac{3}{16} = 40.7$	$217 \frac{1}{16} = 13.6$
x_i	120	48	36	13

Vi ser att de magentafärgade med röda stift var fler än förväntat, så att vi har en avvikelse i den cellen. I övriga celler är avvikelserna mycket små.

Testvariabeln blir

$$\begin{aligned}
 Q &= \sum_{j=1}^r \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j} \\
 &= \frac{(120 - 122.1)^2}{122.1} + \frac{(48 - 40.7)^2}{40.7} + \\
 &\quad + \frac{(36 - 40.7)^2}{40.7} + \frac{(13 - 13.6)^2}{13.6} + \\
 &= 0.03611794 + 1.309337 + 0.5427518 + 0.02647059 \\
 &= 1.914677 < 11.3
 \end{aligned}$$

Slutsats: H_0 förkastas ej på 1% signifikansnivå. Det är möjligt att den botaniska teorin är korrekt. Vårt experiment har inte lyckats motbevisa teorin.

Uppgift 16

a) Från beslutsregeln ser man att $H_0 : \mu = 10$ förkastas om $\mu_{obs}^* = \bar{x}_{obs} < 8.77$ eller om $\bar{x}_{obs} > 11.23$.
Då får vi

$$\begin{aligned} \text{Testets nivå} &= P(H_0 \text{ förkastas} | H_0 \text{ är sann}) = \\ P(\{\bar{X} < 8.77\} \cup \{\bar{X} > 11.23\}) &= P(\bar{X} < 8.77) + P(\bar{X} > 11.23) = |\text{standardisera } \bar{X} \text{ med } \mu = 10| = \\ &= \Phi\left(\frac{8.77 - \mu}{3/\sqrt{16}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{11.23 - \mu}{3/\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(\frac{8.77 - 10}{3/\sqrt{16}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{11.23 - 10}{3/\sqrt{16}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1.23}{3/4}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{1.23}{3/4}\right) = \\ &= 2 \cdot (1 - \Phi(1.64)) = |\text{tabell}| = 0.101. \end{aligned}$$

b) Testets styrka i $\mu = 11$ beräknas enligt

$$\begin{aligned} h(11) &= P(H_0 \text{ förkastas} | \mu = 11 \text{ är det rätta parameters värdet}) = \\ P(\{\bar{X} < 8.77\} \cup \{\bar{X} > 11.23\}) &= P(\bar{X} < 8.77) + P(\bar{X} > 11.23) = |\text{standardisera } \bar{X} \text{ med } \mu = 11| = \\ &= \Phi\left(\frac{8.77 - \mu}{3/\sqrt{16}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{11.23 - \mu}{3/\sqrt{16}}\right) = \Phi\left(\frac{8.77 - 11}{3/\sqrt{16}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{11.23 - 11}{3/\sqrt{16}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2.23}{3/4}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{0.23}{3/4}\right) = \\ &= 2 - \Phi(2.97) - \Phi(0.31) = |\text{tabell}| = 0.3798. \end{aligned}$$