Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1922/SF1923/SF1935 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
TORSDAGEN DEN 16:e APRIL 2026 KL 8.00–10.00.

Kursledare SF1922: Mykola Shykula
Kursledare SF1923/SF1935: Björn-Olof Skytt

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Kontrollskrivningen består av 5 uppgifter. Varje uppgift kan ge antingen 1 eller 0 poäng (korrekt svar ger 1 poäng, felaktigt svar ger 0 poäng). Svara med minst **fyra värdesiffrors** noggrannhet på svarsblanketten. För godkänt krävs minst 3 av 5 poäng.

Uppgift 1

Antag att dom fyra händelserna A, B, C och D är oberoende, där $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, $P(C) = 0.15$, $P(D) = 0.4$. Vad är sannolikheten att minst en av de fyra händelserna inträffar?

Uppgift 2

KTH-studenten David deltar i en frågesport där man får $+1$ poäng för varje korrekt svar och man får -1 poäng för varje felaktigt svar (eller för inget svar). Totala antalet poäng kan alltså bli negativt. Från tidigare omgångar bedömer han att han i genomsnitt ger rätt svar på $60\,\%$ av frågorna. Betrakta poängtilldelningen på olika frågor som oberoende slumpvariabler.
Räkna ut sannolikheten att David efter 10 besvarade frågor har minst 6 poäng.

Uppgift 3

En stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1\,. \end{cases}$$

Bestäm $P\left(X > 0.375 \,|\, X < 0.75\right)$.

Var god vänd!

Uppgift 4

Antalet jobb (noll, ett, två eller tre jobb) som en firma får under en månad kan betraktas som en stokastisk variabel X vars sannolikhetsfunktion ges i tabellen nedan.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	a	0.4	0.2	b

a och b i tabellen är okända. Varje jobb ger en inkomst på 25 (enhet: tusentals kr). Förutom arbetsinkomsten har firman fasta kostnader om 15 (enhet: tusentals kr). Låt Y beteckna firmans resultat för en månad, dvs firmans intäkter minus firmans kostader.
Vi har alltså $Y = 25X - 15$. Bestäm b, om firmans förväntade resultat blev 12.5 (enhet: tusentals kr), dvs om $E(Y) = 12.5$

Uppgift 5

En stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{4} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Bestäm standardavvikelsen $D(X)$.

Lycka till!

Facit

Uppgift 1: 0.8572

Uppgift 2: 0.1673

Uppgift 3: 0.875

Uppgift 4: 0.1

Uppgift 5: 0.4714

Lösningsförslag

Uppgift 1

Antag att dom fyra händelserna A, B, C och D är oberoende, där $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, $P(C) = 0.15$, $P(D) = 0.4$. Vad är sannolikheten att minst en av de fyra händelserna inträffar?

Sannolikheten att minst en av de fyra händelserna inträffar =
$= 1 - P(\text{ingen inträffar}) =$
$= 1 - P(A^* \cap B^* \cap C^* \cap D^*) = 1 - P(A^*)P(B^*)P(C^*)P(D^*) =$
$= 1 - (1 - 0.3)(1 - 0.6)(1 - 0.15)(1 - 0.4) = 0.8572$

Uppgift 2

Sannolikheten att David efter 10 besvarade frågor har minst 6 poäng är lika med
$P(8 \text{ rätt}) + P(9 \text{ rätt}) + P(10 \text{ rätt}) =$

$$= \binom{10}{8}(0.6^8)(0.4^2) + \binom{10}{9}(0.6^9)(0.4^1) + \binom{10}{10}(0.6^{10})(0.4^0) =$$

$$= 45(0.6^8)(0.4^2) + 10(0.6^9)(0.4^1) + 0.6^{10} = 0.1673$$

Uppgift 3

$$P\left(X > 0.375 | X < 0.75\right) = \frac{P\left(X > 0.375 \cap X < 0.75\right)}{P\left(X < 0.75\right)} =$$

$$= P(0.375 < X < 0.75)/P(X < 0.75) = (F_X(0.75) - F_X(0.375))/(F_X(0.75) - F_X(0)) =$$

$$= (0.75^3 - 0.375^3)/(0.75^3 - 0.0^3) = 0.875$$

Uppgift 4

$E(Y) = 25E(X) - 15 = 12.5$, och vi har också:

$$E(X) = \sum_{\text{alla } x} x p_X(x) = 0 \cdot a + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.2 + 3b = 0.8 + 3b$$

$\Rightarrow 25(0.8 + 3b) - 15 = 12.5 \Rightarrow 20 + 75b = 27.5 \Rightarrow b = 0.1$

Uppgift 5

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{4} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Dvs.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq -1, \\ \frac{x^2+2x+1}{4} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Dvs.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \leq -1, \\ \frac{2x+2}{4} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$D(X) = \sqrt{V(X)}$, där
$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x \cdot (2x+2) dx = \frac{1}{2}[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}[(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) - (\frac{-1}{3} + \frac{1}{2})] = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2 \cdot (2x+2) dx = \frac{1}{2}[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}[(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} + \frac{-1}{3})] = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0.4714$$