



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1914/SF1915/SF1916
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAG 16 SEPTEMBER 2026 KL 13.00–15.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Svara med minst fyra värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten. Endast den bifogade svarsblanketten kommer att rättas. För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

I 22% av alla dödsolyckorna i sommartrafiken hade bilen minst ett vinterdäck monterat, medan endast 7% av totala antalet bilar i sommartrafiken hade minst ett vinterdäck monterat.

Hur många gånger större var sannolikheten att råka ut för en dödsolycka i sommartrafiken om bilen hade minst ett vinterdäck monterat än om bilen inte hade minst ett vinterdäck monterat, dvs vad är kvoten mellan de två sannolikheterna (om man endast utgår från dessa data)?

Uppgift 2

En stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x - \frac{x^2}{2}, & \text{om } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Beräkna standardavvikelsen $D(X)$.

Var god vänd!

Uppgift 3

Antalet fel som upptäcks av inspektör 1 vid en kvalitetskontroll är en stokastisk variabel X med sannolikhetsfunktionen

$$p_X(0) = 0.2, \quad p_X(1) = 0.5, \quad p_X(2) = 0.3.$$

Antalet fel som upptäcks av inspektör 2, oberoende av X , är en stokastisk variabel Y med sannolikhetsfunktionen

$$p_Y(y) = c(4 - y), \quad y = 0, 1, 2, 3,$$

där c är en okänd konstant. Låt stokastisk variabel $Z = X + Y$ vara det totala antalet upptäckta fel.

Beräkna $P(Z = 3)$.

Ledning: svaret ska anges som ett numeriskt värde mellan 0 och 1, dvs inte som en funktion av konstanten c .

Uppgift 4

Den tvådimensionella kontinuerliga stokastiska variabeln (X, Y) är likformigt fördelad över triangeln

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}.$$

Beräkna $P(X + Y > 2)$.

Uppgift 5

Variansen $V(X) = 3$. Variansen $V(Y) = 5$. Kovariansen $C(X, Y) = 2$.

Beräkna variansen $V(2X - Y)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Vi inför händelserna VD för minst ett vinterdäck, SD för enbart sommardäck, och DO för dödsolycka.

Givet är att $P(VD|DO) = 0.22$ och att $P(VD) = 0.07 \Rightarrow P(SD|DO) = 0.78$ och att $P(SD) = 0.93$

Vi söker

$$\frac{P(DO|VD)}{P(DO|SD)} = \frac{\frac{P(DO \cap VD)}{P(VD)}}{\frac{P(DO \cap SD)}{P(SD)}} = \frac{\frac{P(VD|DO)P(DO)}{P(VD)}}{\frac{P(SD|DO)P(DO)}{P(SD)}} = \frac{\frac{P(VD|DO)}{P(VD)}}{\frac{P(SD|DO)}{P(SD)}} = \frac{\frac{0.22}{0.07}}{\frac{0.78}{0.93}} = \frac{0.22 \cdot 0.93}{0.07 \cdot 0.78} \simeq 3.74725$$

Uppgift 2

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = (\sqrt{2} - x)\mathbb{I}_{0 < x \leq \sqrt{2}}(x).$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\sqrt{2}} x(\sqrt{2} - x) dx = \left[\frac{\sqrt{2}x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3}{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{3} = \frac{(\sqrt{2})^3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2(\sqrt{2} - x) dx = \left[\frac{\sqrt{2}x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^4}{3} - \frac{(\sqrt{2})^4}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow D(X) = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \simeq 0.3333$$

Uppgift 3

Normeringen (till 1) av sannolikhetsfunktionen ger

$$\sum_{y=0}^3 c(4-y) = c(4+3+2+1) = 10c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 0.1.$$

Alltså är

$$p_Y(0) = 0.4, \quad p_Y(1) = 0.3, \quad p_Y(2) = 0.2, \quad p_Y(3) = 0.1.$$

Eftersom X och Y är oberoende ges fördelningen för $Z = X + Y$ av faltningsformeln

$$p_Z(z) = \sum_x p_Y(z - x) p_X(x).$$

För $z = 3$ är de tillåtna värdena på x (där både $p_X(x) > 0$ och $p_Y(3 - x) > 0$): $x = 0, 1, 2$ (eftersom X endast antar värdena $0, 1, 2$). Vi har:

$$\begin{aligned} P(Z = 3) &= p_X(0) p_Y(3) + p_X(1) p_Y(2) + p_X(2) p_Y(1) \\ &= (0.2)(0.1) + (0.5)(0.2) + (0.3)(0.3) \\ &= 0.02 + 0.10 + 0.09 = 0.21 \end{aligned}$$

Uppgift 4

För en triangel $T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\}$, $a > 0$, ges arean av:

$$S(T_a) = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy = \int_0^a (a - x) dx = \frac{a^2}{2}$$

Alltså är

$$S(T_3) = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}, \quad S(T_2) = \frac{2^2}{2} = \frac{4}{2}$$

Eftersom (X, Y) är likformigt fördelad över T_3 , så är tätheten $f_{X,Y}(x, y)$ konstant, och sannolikheten för en delregion ges därför av areakvoten:

$$P(X + Y \leq 2) = \frac{S(T_2)}{S(T_3)} = \frac{2^2/2}{3^2/2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \simeq 0.44444$$

Därmed,

$$P(X + Y > 2) = 1 - P(X + Y \leq 2) = 1 - 0.44444 \simeq 0.55556$$

Uppgift 5

$$\begin{aligned} V(2X - Y) &= V(2X) + V(-Y) + 2C(2X, -Y) = \\ &= 2^2 V(X) + (-1)^2 V(Y) + 2 \cdot 2 \cdot (-1) C(X, Y) = 4 \cdot 3 + 5 - 4 \cdot 2 = 9 \end{aligned}$$