Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER FREDAGEN DEN 19 AUGUSTI 2016 KL 08.00–13.00.

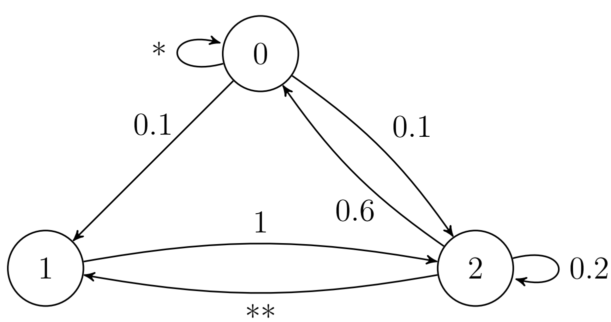
Examinator: Jimmy Olsson tel. 790 72 01.
Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik, Mathematics Handbook (Beta), räknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 5 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 20 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 18–19 poäng. Tid och plats för komplettering kommer att anges på kursens hemsida. Det ankommer på dig själv att ta reda på om du har rätt att komplettera.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Uppgift 1

Ett indikeringsinstrument växlar läge en gång per minut mellan de tre tillstånden $\mathbf{E} = \{normal, low, alert\}$. Systemet verkar befinna sig cirka 5 minuter åt gången i normalläget och kortare tid i de övriga två tillstånden, dock aldrig mer än en minut åt gången i *alert*. Efter noggrannare observationer har man uppskattat att växlingarna kan beskrivas av en Markovkedja med sannolikheter enligt övergångsgrafen



a) Vilka värden ska vara istället för * och **? (1 p)

b) Ange för de tre tillstånden vilket som svarar mot 0,1,2 i figuren. (2 p)

c) Beräkna sannolikheten att vi under tio minuter står still i tillståndet *normal*. (2 p)

d) Anta att man väljer X_0 slumpmässigt med sannolikheten 1/3 för vardera tillstånd. Beräkna fördelningen för X_2. (2 p)

e) Under samma antagande som i (d). Beräkna sannolikheten att om vi efter 2 minuter befinner oss i *low* började vid minut 0 i *normal*. (3 p)

Uppgift 2

Osquar utför en slumpvandring på en (oändligt lång) bro byggd av sex parallella plankor i brons längdriktning. För varje steg framåt flyttar han sig dessutom 1 planka åt höger, 1 planka åt vänster eller fortsätter på samma planka med sannolikhet 1/3 vardera. Bron är lyckligtvis utrustad med skyddsräcken så att då Osquar befinner sig på en ytterplanka och försöker fortsätta utåt studsas han tillbaka till den näst yttersta plankan.

a) Inför en lämplig modell och visa att det finns en asymptotisk fördelning för vilken planka Osquar befinner sig på efter lång tid, samt beräkna hur stor andel av tiden Osquar befinner sig vid någon av ytterplankorna (i jämviktstillståndet). (5 p)

b) Osquar startar på någon av mittenplankorna. Beräkna förväntat antal steg innan han för första gången stöter i skyddsräcket. (5 p)

Uppgift 3

Låt $\{N(t); t \geq 0\}$ vara en Poissonprocess med intensitet λ. Som vi vet börjar den alltid med $N(0) = 0$. Vid tidpunkten 1 vet man att exakt ett hopp har inträffat, dvs. $N(1) = 1$. Om vi låter T vara den stokastiska variabeln som är tillfället (mellan 0 och 1) där detta hopp inträffade. I denna uppgift ska vi bestämma den betingade fördelningen för T givet $N(1) = 1$.
Börja med att bestämma fördelningsfunktionen för T givet $N(1) = 1$, dvs. beräkna

$$F_{T|N(1)=1}(t) = P\left(T \leq t \mid N(1) = 1\right).$$

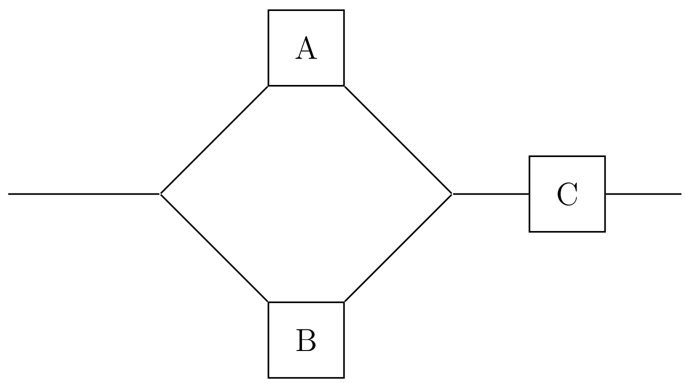
Identifiera sedan fördelningen för T givet $N(1) = 1$.
Tips: Använd lagen om total sannolikhet för $N(t)$. Tänk på vilka värden som $N(t)$ kan anta. (10 p)

Uppgift 4

Varje dag på väg till jobbet går Helena in på ett cafe och köper en kaffe. Caféet där hon köper sitt kaffe kan betraktas som ett M/M/3 system i jämnvikt med $\lambda = 10$ personer/minut och betjäningsintensitet $\mu = 5$ personer/minut. Antag att det under ett år är 200 arbetsdagar.
Beräkna sannolikheten att hon behöver köa färre än 150 av dessa dagar. Lämpliga och välmotiverade approximationer är tillåtna. (10 p)

Uppgift 5

En maskin består av tre komponenter, A, B, och C. Där A och B är parallellkopplade och C är seriekopplad med A och B, se schemat i bilden nedanför, för att maskinen ska fungera måste man kunna ta sig från vänster till höger i bilden genom fungerande komponenter. Komponenterna går sönder oberoende av varandra men bara när maskinen fungerar efter exponentialfördelade tider med intensiteterna λ_A, λ_B och λ_C. Där $\lambda_A = \lambda_B = 5$ och $\lambda_C = 2$. När en komponent går sönder repareras den med intensitet $\mu = 5$ oberoende av vilken komponent det är. Man har tillgång till 1 reperatör och när reperatören har påbörjat en reparation kommer den fortsätta att reparera den komponenten tills den är klar.
Ställ upp systemet och beräkna sannolikheten att maskinen fungerar efter lång tid. Beräkna också sannolikheten att reparatören arbetar.



Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGAR TILL
TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
FREDAGEN DEN 21 AUGUSTI 2015 KL 08.00–13.00

Uppgift 1

a) De saknade sannolikheterna är 0.8 och 0.2

b) Vi har att 0 är normal, 1 är alert och 2 är low

c) Den sökta sannolikheten är 0.8^{10}

d) Vi söker $p^{(2)} = p^{(0)} P^2 = (19/30, 4/30, 7/30)$

e) Sökt sannolikhet är

$$\mathbb{P}(X_0 = 0 \mid X_2 = 2) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 2 \mid X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0)}{\mathbb{P}(X_2 = 2)} = \frac{0.2 \cdot 1/3}{13/30} = \frac{2}{13}$$

Uppgift 2

Vi låter $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och X_n =Osquars läge efter n steg, $n = 0, 1, 2, \cdots$ där 1 och 6 är de två ytterplankorna. Då utgör $(X_n;\, n = 0, 1, 2, \cdots)$ en Markovkedja i diskret tid. Av symmetriskäl kan vi låta $E = \{1, 2, 3\}$ där 1 är ytterplankan och kedjan får då övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Denna kedja är irreducibel ty $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1$ och aperiodisk (ty $p_{11} > 0$ t ex) och alltså är den ergodisk eftersom den är ändlig. Alltså existerar en unik asymptotisk fördelning $\underline{\boldsymbol{\pi}} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ oavsett starttillstånd och $\underline{\boldsymbol{\pi}}$ löser ekvationssytemet $\underline{\boldsymbol{\pi}} = \underline{\boldsymbol{\pi}} \cdot P$ samt $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Vi får alltså

$$\begin{array}{lllllll} \pi_1 & = & \frac{1}{3}\pi_1 & + & \frac{1}{3}\pi_2 & & \\ \pi_2 & = & \frac{2}{3}\pi_1 & + & \frac{1}{3}\pi_2 & + & \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_2 & = & & & \frac{1}{3}\pi_2 & + & \frac{2}{3}\pi_3 \end{array}$$

Första ekvationen ger $\pi_2 = 2\pi_1$ och tredje ekvationen ger $\pi_2 = \pi_3$ och detta insatt i normeringsekvationen ger $1 = \pi_1(1 + 2 + 2)$ dvs $\underline{\pi_1 = 1/5, \quad \pi_2 = \pi_3 = 2/5}$. Andelen av tiden som Osquar befinner sig på ytterplankan är $\underline{\pi_1} = 1/5$.

b) Tillfoga ett absorberande tillstånd 0 som innebär krock med skyddsräcket. Vi får då en A-kedja med $A = \{0\}$ och $G = \{1, 2, 3\}$ och övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

I enlighet med formelsamlingen inför vi $t_i = E(\text{tid till absorption} \mid \text{start i tillstånd } i)$ och där vi söker t_3. Vi har då $t_i = 1 + \sum_{j \in G} p_{ij} t_j$ vilket ger

$$\begin{array}{lllllllll} t_3 & = & 1 & + & \frac{1}{3}t_2 & + & \frac{2}{3}t_3 & & \\ t_2 & = & 1 & + & \frac{1}{3}t_1 & + & \frac{1}{3}t_2 & + & \frac{1}{3}t_3 \\ t_1 & = & 1 & + & \frac{1}{3}t_1 & + & \frac{1}{3}t_2 & & \end{array}$$

Första ekvationen ger $t_2 = t_3 - 3$ och 3:e ekvationen ger $2t_1 = 3 + t_2 = 3 + (t_3 - 3) = t_3$. Andra ekvationen ger $2t_2 = 3 + t_1 + t_3$ och om vi sätter in de tidigare resultaten får vi $2(t_3 - 3) = 3 + \frac{1}{2}t_3 + t_3$ som ger $t_3 = \underline{18}$.

Uppgift 3

Då en Poissonprocess är en strikt stigande process och $N(1) = 1$ kan $N(t)$ endast anta värden 0 och 1. Vi får då

$$\begin{aligned} F_{T|N(1)=1}(t) &= P\left(T \le t \mid N(1) = 1\right) \\ &= \frac{P\left(T \le t, N(1) = 1\right)}{P\left(N(1) = 1\right)} \\ &\overset{(1)}{=} \frac{P\left(T \le t, N(1) = 1 \mid N(t) = 0\right)}{P\left(N(1) = 1\right)} P\left(N(t) = 0\right) \\ &+ \frac{P\left(T \le t, N(1) = 1 \mid N(t) = 1\right)}{P\left(N(1) = 1\right)} P\left(N(t) = 1\right) \\ &\overset{(2)}{=} \frac{P\left(N(1) = 1 \mid N(t) = 1\right) P\left(N(t) = 1\right)}{P\left(N(1) = 1\right)} \\ &= \frac{\frac{(\lambda(1-t))^0}{0!} e^{-\lambda(1-t)} \frac{(\lambda \cdot t)^1}{1!} e^{-\lambda \cdot t}}{\frac{(\lambda)^1}{1!} e^{-\lambda}} = t. \end{aligned}$$

Vid (1) använder vi lagen om total sannolikhet och betingar då på de möjliga händelserna för $N(t)$. Vid (2) använder vi att T ska vara tidpunkten för hoppet och om $N(t) = 1$ vet vi att $T \le t$ och om $N(t) = 0$ så vet vi att $T > t$.
Eftersom att t alltid är mellan 0 och 1 i detta fall är fördelningen för T betingat på $N(1) = 1$ uniform mellan 0 och 1.

Uppgift 4

Vi börjar med att lösa ut sannolikheten att hon får köa en specifik dag. Denna fås från formelsamlingen till $p_c/(1-\rho)$, vi har att $\rho = \frac{10}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$,

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{2} \frac{(3\rho)^n}{n!} + \frac{(3\rho)^3}{3!(1-\rho)} \right)^{-1} = (1 + 2 + 2 + 4)^{-1} = \frac{1}{9}$$

och

$$p_3 = p_0 \frac{(3\rho)^3}{3!} = \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{6} = \frac{4}{27}.$$

Detta ger att sannolikheten för att stå i kö en dag är $\frac{4}{27} \cdot 3 = \frac{4}{9}$.
Vilket i sin tur ger att antalet kö-dagar under ett år är $\text{Bin}(200, \frac{4}{9})$ fördelat. Den sökta sannolikheten (att en sådan stokastisk variabel är mindre än 149) blir då 1.

Uppgift 5

För att lösa detta system behöver vi 5 tillstånd, $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ som vi definerar enligt följande:

0: Alla komponenter fungerar

1: A eller B trasig

2: A och B trasig

3: C trasig

4: A eller B trasig och C trasig

Då enligt uppgiften ingen komponent kan gå sönder när maskinen inte fungerar kan vi aldrig nå ett tillstånd där A, B och C alla är trasiga samtidigt. Också från uppgiften får vi reda på att reparatören fokuserar på en komponent åt gången, det betyder att om vi kommer till tillstånd 4, kommer vi alltid att gå till tillstånd 3. Detta ger oss följande intensitetsmatris

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -12 & 10 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & -12 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Då systemet är ändligt och irreducibelt existerar en unik stationär fördelning som också är den asymptotiska fördelningen vilket ges av ekvationssystemet $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = 0$ tillsamans med $\pi_0 + \pi_1 + \ldots \pi_4 = 1$. Vi löser detta system och får den approximativa lösningen $\boldsymbol{\pi} = [0.185, 0.265, 0.265, 0.180, 0.105]$. Svaret är att den fungerar i tillstånd 0 och 1 vilket ger sannolikheten att den fungerar efter lång tid till 0.45. OCh sannolikheten att reparatören arbetar till 1 - 0.185 = 0.815.