Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 29 MAJ 2018 KL 14.00–19.00.

Examinator: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Kursansvarig: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik, Mathematics Handbook (Beta), hjälpreda för miniräknare, miniräknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 5 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 20 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med preliminärt 18–19 poäng. Tid och plats för komplettering kommer att anges på kursens hemsida. Det ankommer på dig själv att ta reda på om du har rätt att komplettera.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Uppgift 1

Följande anses vara en god modell för trafiken på en landsväg: $2/15$ av alla personbilar åtföljs av en buss och $1/5$ åtföljs av en lastbil. En lastbil åtföljs av en personbil i $2/3$ av fallen och en lastbil i resten av fallen. Bussar åtföljs alltid av personbilar.
Bestäm under lämpliga modellantaganden andelen personbilar på vägen och beräkna det genomsnittliga antalet lastbilar mellan två bussar. (10 p)

Uppgift 2

Vi tänker oss att personer lever för evigt och inte åldras. En person kan antingen ha arbete, vara arbetslös eller vara förtidspensionerad. Sannolikheten att en person som har arbete under en kort tidsperiod Δt (år) övergår till arbetslös är $0.2\Delta t$ (dvs. med intensiteten 0.2 per år). Sannolikheten att en arbetslös person under tiden Δt får ett arbete är $4\Delta t$ och sannolikheten att personen blir förtidspensionerad (av arbetsmarknadsmässiga skäl) är $0.5\Delta t$.
En person som har arbete blir aldrig förtidspensionerad direkt, och en förtidspensionerad person förblir så för evigt.

a) En person börjar ett arbete och tjänar 280 000 kronor om året medan han arbetar, och har 224 000 kronor om året i arbetslöshetsersättning när han är arbetslös. Som förtidspensionerad har han ingen inkomst, utan lever på luft.
Bestäm personens förväntade totala inkomst. (5 p)

b) En person som börjar med arbete blir så småningom förtidspensionerad och måste då uppenbarligen varit arbetslös vid åtminstone ett tillfälle (en period av arbetslöshet). Bestäm sannolikhetsfördelningen för X = antalet arbetslöshetsperioder, dvs $P(X = k)$ för $k = 1, 2, \ldots$. (5 p)

Uppgift 3

Till en nord-sydgående 2 km lång tunnel anländer bilar norrifrån enligt en poissonprocess med intensitet 1 bilar per minut och söderifrån enligt en poissonprocess med intensitet 0.5 bilar per minut. Poissonprocesserna är oberoende av varandra. Bilar som anländer till tunneln kör med exakt 60 km/timme.

a) Beräkna sannolikheten att vid en fix tidpunkt t, högst 5 bilar finns i tunneln. (5 p)

b) Vad är sannolikheten att en norrifrån kommande bil inte möter någon bil under sin färd genom tunneln? (5 p)

Uppgift 4

Till en betjäningsstation anländer kunder enligt en poissonprocess med intensitet $\lambda = 2$ kunder per minut. Betjäningsstationen har två betjäningsställen, 1 och 2, med gemensam kö och med betjäningsintensiteter $\nu_1 = 2$ och $\nu_2 = 1$ kunder per minut. Om bara en kund finns i systemet betjänas denne av betjäningsställe 1 som har den största betjäningsintensiteten. Låt $X(t)$ vara antalet kunder vid betjäningsstationen vid tidpunkt t.

a) Motivera att den asymptotiska fördelningen för $X(t)$ då tiden t går mot oändligheten existerar, samt beräkna denna. (6 p)

b) Beräkna förväntat antal kunder i systemet vid “asymptotisk” tidpunkt. (4 p)

Uppgift 5

Till en offentlig toalett ankommer besökare enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 8$ besökare per timme. Ett toalettbesök varar en exponentialfördelad tid med väntevärde 4 minuter. Besökare som kommer till en upptagen toalett väntar på sin tur i en ordnad kö.

Under den tid som toaletten är upptagen förbrukas i genomsnitt 1 decimeter toalettpapper per minut. Bestäm den genomsnittliga pappersförbrukningen under en dag om toaletten har öppet mellan klockan 08.00 och 20.00. (10 p)

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGAR TILL
TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 29 MAJ 2018 KL 14.00–19.00

Uppgift 1

i antar att sekvensen av fordonstyper på landsvägen låter sig beskrivas av en Markovkedja med tillståndsrum

$$E = \{\text{personbil}, \text{lastbil}, \text{buss}\} = \{1, 2, 3\}$$

och övergångsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 10/15 & 3/15 & 2/15 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tillståndsrummet är ändligt, och kedjan är irreducibel och aperiodisk så en unik stationärfördelning existerar och är gränsfördelning för den ergodiska kedjan.
Sannolikhetsfördelningen π som löser $\pi = \pi P$, dvs

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{10}{15}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2 + 1\pi_3 \\ \pi_2 = \frac{3}{15}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + 0\pi_3 \\ \pi_3 = \frac{2}{15}\pi_1 + 0\pi_2 + 0\pi_3 \end{cases}$$

är $\pi = [\pi_1\ \pi_2\ \pi_3] = [\frac{30}{43}\ \frac{9}{43}\ \frac{4}{43}]$. Andelen personbilar på vägen är således $\pi_1 = 30/43 = \underline{0.70}$.
Det genomsnittliga antalet lastbilar mellan två bussar är det förväntade antalet besök i tillstånd 2 mellan två besök i tillstånd 3 är

$$\frac{1}{\pi_3} \cdot \pi_2 = \frac{9}{4} = \underline{2.25}$$

Uppgift 2

a) Vi har här en Markovkedja med tillståndsrum

$$E = \{\text{Arbete}, \text{Arbetslös}, \text{Förtidspension}\} = \{1, 2, 3\}$$

och intensitetsmatris

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 4 & -4.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Låt oss utgå från ekvationen för tiden till absorption vid start i tillstånd i. Här är tillstånd 3 absorberande och vi har:

$$t_1 = \frac{1}{q_1} + \frac{q_{12}}{q_1} \cdot t_2$$
$$t_2 = \frac{1}{q_2} + \frac{q_{21}}{q_2} \cdot t_1$$

Tiden man ligger kvar i tillstånd i tills man hoppar därifrån är

$$\frac{1}{q_i}$$

Låt nu x vara den förväntade inkomsten om man börjar i arbete, och y vara den förväntade inkomsten om man börjar som arbetslös. Man får då ekvationssystemet

$$x = \frac{280000}{q_1} + \frac{q_{12}}{q_1} \cdot y$$
$$y = \frac{224000}{q_2} + \frac{q_{21}}{q_2} \cdot x$$
$$x = \frac{280000}{0.2} + \frac{0.2}{0.2} \cdot y$$
$$y = \frac{224000}{4.5} + \frac{4}{4.5} \cdot x$$

$$\begin{aligned} 280\,000 - 0.2x + 0.2y &= 0 \\ 224\,000 - 4.5y + 4x &= 0 \end{aligned}$$

som ger $x = 13\,048\,000$ kronor.

b) Betrakta hoppkedjan. Sannolikheten att man från arbetslöshet går till att ha arbete, betingat att man byter tillstånd, är $\frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$ medan sannolikheten att man går till förtidspension, betingat att man byter tillstånd, är $\frac{1}{9}$. Varje gång man får ett arbete kommer man senare att bli arbetslös igen, medan om man blir förtidspensionerad så stannat man där för evigt. Sannolikheten $P(\text{antal perioder av arbetslöshet} = k)$ är alltså $(\frac{8}{9})^{k-1}\frac{1}{9}$, dvs. vi har en ffg($\frac{1}{9}$).

Uppgift 3

a) Eftersom de bilar som vid en tidpunkt finns i tunneln är de som kommit norrifrån eller söderifrån under de två senaste minuterna (det tar två minuter för en bil att köra genom tunneln), är antalet bilar i tunneln lika med $X + Y$ där $X \in \text{Po}(2 \cdot 1) = \text{Po}(2)$ och $Y \in \text{Po}(2 \cdot 0.5) = \text{Po}(1)$). Totala antalet bilar är $X + Y$ är då $\text{Po}(2 + 1) = \text{Po}(3)$ och $P(X + Y \leq 5) = 0.916$ enligt tabell 7.

b) När en norrifrån kommande bil kommer till tunneln är de söderifrån kommande bilarna som finns i tunneln de som anlänt under de senaste två minuterna. Dessa kommer den norrifrån kommande bilen att möta liksom de bilar som anländer söderifrån till tunneln under de två minuter som det tar för den norrifrån kommande bilen att fara genom tunneln. Antalet bilar, Z, som anländer söderifrån till tunneln under dessa fyra minuter är $\text{Po}(4 \cdot 0.5) = \text{Po}(2)$ och $P(Z = 0) = e^{-2} = 0.135$

Uppgift 4

a) $\{X(t); t \geq 0\}$ är en födelse-dödsprocess med födelseintensiteter $\lambda_i = \lambda,\ i = 0, 1, 2, \ldots$ och dödsintensiteter

$$\begin{cases} \mu_1 = \nu_1 = 2 \\ \mu_i = \nu_1 + \nu_2 = 3,\ i = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Med sedvanliga beteckningar får vi $\rho_0 = 1$ och

$$\rho_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{\lambda^n}{\nu_1 \cdot (\nu_1 + \nu_2)^{n-1}} = \frac{2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, n = 1, 2, \ldots$$

Summan av alla ρ_n är $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{1-2/3} = 4$ (geometrisk serie). Regularitetsvillkoret $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} = \infty$ är med råge uppfyllt eftersom termerna i summan går mot oändligheten. Födelse-dödsprocessen har alltså en asymptotisk fördelning som ges av

$$p_n = \frac{\rho_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{om } n = 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & \text{om } n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1}$$

b) Låt X har fördelningen enligt (1). Väntevärdet blir

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{3}{4} \cdot 3 = 2.25$$

eftersom den sista summan är väntevärdet av en ffg($\frac{1}{3}$)-fördelning.

Uppgift 5

Antalet personer vid toaletten beskrivs av en Markovkedja $(X(t); t \geq 0)$, en födelse-/dödsprocess med ankomstintensitet $\lambda = 8$ och betjäningsintensitet $\mu = 60/4 = 15$ per timme (ett M/M/1-system). Eftersom $\rho = \lambda/\mu = 8/15 < 1$ är systemet stabilt och Markovkedjan är ergodisk med gränsfördelning given av stationärfördelningen π där

$$\pi_k = (1 - \rho)\rho^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Av de 12 timmar toaletten är öppen är den i genomsnitt upptagen

$$12(1 - \pi_0) = 12(1 - (1 - \rho)) = 12\rho \text{ timmar} = 12\rho \cdot 60 \text{ minuter} = 384 \text{ minuter}$$

under vilket det i genomsnitt förbrukas <u>38.4 meter toalettpapper</u>.