Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
FREDAGEN DEN 17 AUGUSTI 2018 KL 8.00–13.00.

Examinator: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Kursansvarig: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik, Mathematics Handbook (Beta), hjälpreda för miniräknare, miniräknare.

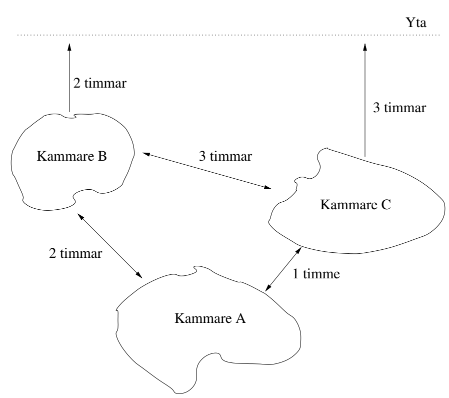
Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 5 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 20 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med preliminärt 18–19 poäng. Tid och plats för komplettering kommer att anges på kursens hemsida. Det ankommer på dig själv att ta reda på om du har rätt att komplettera.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Uppgift 1

Ett gruvlag är vilse i en gruva med 3 kammare. I varje kammare väljer de en av de gångar som leder bort från kammaren med lika stor sannolikhet, oberoende av tidigare val. I figuren återges antalet timmar det tar att förflytta sig utmed de givna gångarna.

Om gruvlaget befinner sig i kammare A, bestäm det förväntade antalet timmar som behövs innan gruvlaget kommer upp till ytan. (10 p)



Uppgift 2

En Markovprocess $\{X(t); t \geq 0\}$ med tillståndsrum $\{1, 2, 3, 4\}$ har intensitetsmatrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Kedjan startar vid tidpunkt 0 i tillstånd 1.

a) Beräkna sannolikheten att processen gör sitt första hopp före tidpunkten 0.1. (3 p)

b) Motivera att en asymptotisk fördelning existerar samt beräkna denna. (4 p)

c) Beräkna sannolikheten att processens andra hopp sker till tillstånd 4. (3 p)

Uppgift 3

under anländer till en betjäningsstation med väntrum enligt en Poissonprocess med intensiteten 3 kunder/min. Väntrummet rymmer, utöver en kund som betjänas, ytterligare endast en person. En kund lämnar systemet omedelbart om väntrummet är upptaget. Betjäningstiderna är exponentialfördelade med väntevärde 1/2 min.

Beräkna förlustsannolikheten, dvs sannolikheten (efter lång tid) att en kund omedelbart lämnar systemet. (10 p)

Uppgift 4

Kunder till en betjäningsstation har exponentialfördelade betjäningstider med väntevärdet 1 minut. Kunder kommer alltid parvis, dvs två och två tillsammans, och varje par anländer till betjäningsstationen enligt en Poissonprocess med intensitet 0.6 par per minut.
Trots att de uppskattar sällskapet med varandra, så är de inte så sällskapliga att de vill ”dela” betjäningsstationen med andra kunder. Detta innebär att ett par ansluter sig till betjäningssystemet endast om det är tomt.
De två i paret blir betjänade var för sig, vilket innebär att en av kunderna får köa medan den andra betjänas. När båda kunderna är färdigbetjänade lämnar paret betjäningsstationen tillsammans.

Bestäm det förväntade antalet personer vid betjäningsstationen efter lång tid. (10 p)

Uppgift 5

Till en specialaffär med endast en expedit kommer kunder enligt en Poissonprocess med intensiteten 8 kunder/timme. Betjäningen av en kund kan ses som bestående av två delar. Först ska expediten hämta produkten som kunden ska ha och även eventuella extra tillbehör till denna produkt. Tiden för denna första del kan betraktas som en stokastisk variabel som är kontinuerligt likformigt fördelad mellan 1 och 7 minuter. Sedan skall betalningen ske. Vi antar att denna andra del av betjäningstiden är exponentialfördelad med väntevärdet 1 minut. Systemet förutsätts befinna sig i stationärt tillstånd. Alla betjäningstider förutsätts oberoende av varandra och av ankomstprocessen.

Beräkna den genomsnittliga tiden en kund befinner sig i systemet, d.v.s. tiden från det att kunden ställer sig i en eventuell kö till dess att kundens betalning är klar. (10 p)

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGAR TILL
TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 17 AUGUSTI 2018 KL 8.00–13.00

Uppgift 1

Låt t_1, t_2 och t_3 vara den förväntade tiden tills gruvlaget är vid ytan givet att de startar i kammare A, B resp. C. Dessa förväntade värden uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} t_1 &= \frac{1}{2}(2+t_2)+\frac{1}{2}(1+t_3) \\ t_2 &= \frac{1}{3}(2+t_1)+\frac{1}{3}(3+t_3)+\frac{1}{3}\cdot 2 \\ t_3 &= \frac{1}{3}(3+t_2)+\frac{1}{3}(1+t_1)+\frac{1}{3}\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 &= 10 \\ t_2 &= \frac{17}{2} \\ t_3 &= \frac{17}{2} \end{cases}$$

Alltså, sökt är $\underline{t_1 = 10 \text{ timmar}}$.

Uppgift 2

) Sätt T=tid i tillstånd 1 innan hopp. Då är $T \in$Exp(7). Vi söker $P(T < 0.1) = \int_{-\infty}^{0.1} f_T(t)dt = \int_0^{0.1} 7e^{-7t}dt = 1 - e^{-7\cdot 0.1} = 1 - e^{-0.7} = 0.5034$.

b) Markovprocessen är ändlig och irreducibel, $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ är möjliga hopp, vilket visar att alla tillstånd kommunicerar med varandra. Processen är därför ergodisk och gränsfördelningen ges av den stationära. Vi har att lösa $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ samt $\sum \pi_i = 0$, d.v.s. ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -7\pi_1 + 2\pi_3 + 2\pi_4 &= 0 \\ 3\pi_1 - 4\pi_2 + 4\pi_3 + 4\pi_4 &= 0 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 - 9\pi_3 &= 0 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 - 6\pi_4 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

vilket har lösningen $\pi_1 = 4/35,\ \pi_2 = 17/35,\ \pi_3 = 2/15,\ \pi_4 = 4/15$.

c) Hoppkedjan har övergångsmatrisen ($p_{ij} = q_{ij}/q_i$)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 3/7 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/9 & 4/9 & 0 & 3/9 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi söker sannolikheten att hoppkedjan är i tillstånd 4 efter två hopp vid start i tillstånd 1. Men denna sannolikhet ges av $p_{14}^{(2)}$ som är motsvarande element i matrisen $\mathbf{P}^2$. Detta element fås som första raden i $\mathbf{P}$ gånger fjärde kolonnen i $\mathbf{P}$, d.v.s. är

$$0 + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{9} + 0 = \frac{13}{42}$$

.

Uppgift 3

åt $X(t)$ vara antalet kunder i systemet vid tid t. $X(t)$ är en födelse-döds-process med tillståndsrum $\{0, 1, 2\}$ och födelseintensiteter $\lambda_0 = \lambda_1 = 3$ och dödsintensiteter $\mu_1 = \mu_2 = 2$. Vi söker

$$\pi_2 = \frac{\rho_2}{1 + \rho_1 + \rho_2} = \frac{\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{9}{19} = \underline{0.47}.$$

Uppgift 4

Låt $(X(t); t \geq 0)$ vara den Markovkedja som beskriver systemets tillstånd. Systemet har tillstånden

$$\boldsymbol{E} = \{0, 1, 2\} = \{\text{Tomt}, \text{Första under betjäning}, \text{Andra under betjäning}\}$$

och $X(t)$ har intensitetsmatris

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\mu & \mu \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

där λ är ankomstintensiteten för par, $\lambda = 0.6$ och μ är betjäningsintensiteten $\mu = 1$.
Eftersom E är ändlig finns minst en stationärfördelning och eftersom kedjan är irreducibel (sekvensen $0 \to 1 \to 2 \to 0$ är möjlig och går genom samtliga tillstånd) är stationärfördelningen unik. Markovkedjan är ergodisk med stationärfördelningen som gränsfördelning.
Stationärfördelningen π är den sannolikhetsfördelning som uppfyller $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, dvs

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 &= \mu\pi_2 \\ \mu\pi_1 &= \lambda\pi_0 \\ \mu\pi_2 &= \mu\pi_1 \end{aligned}$$

vilket ger $\pi_2 = \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$. Alltså

$$1 = \sum_k \pi_k = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0$$

vilket är uppfyllt om

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 2\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{5}{11}, \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\pi} = \left(\frac{5}{11}\ \frac{3}{11}\ \frac{3}{11}\right).$$

Sökt är väntevärdet

$$E\,(\text{Antal kunder}) = 0\pi_0 + 2\pi_1 + 2\pi_2 = \frac{12}{11}.$$

Uppgift 5

Här har vi en M/G/1-process och använder oss av §16.3. $U = T_1 + T_2$=totala betjäningstiden i minuter, där $T_1 \in U[1, 7]$ och $T_2 \in exp(1)$.

$E(U) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 1 = 5$

$V(U) = \text{ty ober} = V(T_1) + V(T_2) = \frac{(7-1)^2}{12} + 1 = 4$

Betjäningsfaktorn $\rho = \frac{\lambda}{\mu c}$ för M/M/c-processer. Här har vi en M/G/c process och sätter då in 1/E(U) i stället för μ.

Då fås

$$\rho = \frac{\lambda}{\frac{1}{E(U)} \cdot 1} = \lambda \cdot E(U) = \frac{8}{60} \cdot 5 = \frac{2}{3}$$

Enligt §16.3 fås då

$$l_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}(1 + \frac{V(U)}{[E(U)]^2}) = \frac{(\frac{2}{3})^2}{2(1-\frac{2}{3})}(1 + \frac{4}{5^2}) = \cdots = \frac{58}{75}$$

Sökt är

$$w = \frac{l}{\lambda} = \frac{\rho + l_q}{\lambda} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{58}{75}}{\frac{2}{15}} = \cdots = 10.8$$

Svar:Genomsnittliga tiden i systemet för en kund är 10.8 minuter