



KTH Matematik

Avd. Matematisk statistik

KONTROLLSKRIVNING I  
SF1910/SF1925 TILLÄMPAD STATISTIK,  
ONSDAG 20 NOVEMBER 2019 KL 08.00–10.00.

*Tillåtna hjälpmedel:* miniräknare

Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!  
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

### Uppgift 1

För många sjukdomar gäller att de diagnostiska test som finns inte alltid ger rätt resultat. Dels kan en person som har sjukdomen testa negativt för sjukdomen, dels kan en frisk person få ett testresultat som tyder på att personen har sjukdomen. Antag att en godtycklig person har en viss sjukdom med sannolikhet 0.09. Antag vidare att diagnosmetoden ger rätt resultat om en person är frisk med sannolikhet 0.84, och rätt resultat om personen är sjuk med sannolikhet 0.89. Hur stor är sannolikheten för felaktig diagnos?

### Uppgift 2

De diskreta stokastiska variablerna  $X$  och  $Y$  är oberoende och har sannolikhetsfunktionerna

$$p_X(k) = \frac{1^k}{k!} e^{-1} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \dots$$

respektive

$$p_Y(k) = \frac{2^k}{k!} e^{-2} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \dots$$

Beräkna  $P(X + Y = 2)$ .

### Uppgift 3

En stokastisk variabel  $X$  har fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0, \\ 1 - \frac{(20 - x)^2}{400} & \text{om } 0 \leq x \leq 20, \\ 1 & \text{om } x > 20. \end{cases}$$

Beräkna väntevärdet  $E(X)$ .

Var god vänd!

#### Uppgift 4

Fem personer singlar ett symmetriskt mynt två gånger var. Beräkna sannolikheten att minst en av de fem personerna får krona i bägge kasten.

#### Uppgift 5

Låt  $X$ ,  $Y$  och  $Z$  vara stokastiska variabler sådana att  $X$  och  $Y$  är oberoende och  $X$  och  $Z$  är oberoende. Vidare gäller att  $C(Y, Z) = 2$ ,  $V(X) = 1$ ,  $V(Y) = 2$ ,  $V(Z) = 3$ . Beräkna  $V(2X + Y - Z)$ .

Lycka till!

## Lösningsförslag

### Uppgift 1

Låt händelserna  $S$  och  $F$  vara att en person är sjuk respektive frisk,  $F$  är komplementet till  $S$ .

Låt vidare händelserna  $DS$  och  $DF$  vara att en person fått diagnosresultat som tyder på att personen är sjuk resp frisk. Vi har att  $P(S) = 0.09$ ,  $P(F) = P(S^*) = 0.91$ ,  $P(DS|S) = 0.89$  och  $P(DF|F) = 0.84$ .

Låt händelsen  $FelD$  vara att diagnosen är felaktig.

Lagen om total sannolikhet ger nu

$$\begin{aligned} P(FelD) &= P(FelD|S) \cdot P(S) + P(FelD|F) \cdot P(F) \\ &= P(DF|S) \cdot P(S) + P(DS|F) \cdot P(F) = \{\text{komplementet}\} \\ &= (1 - P(DS|S)) \cdot P(S) + (1 - P(DF|F)) \cdot P(F) \\ &= (1 - 0.89) \cdot 0.09 + (1 - 0.84) \cdot 0.91 = 0.1555 \end{aligned}$$

**Svar:** 0.156

### Uppgift 2

Vi har

$$\begin{aligned} P(X + Y = 2) &= P(X = 0, Y = 2) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) \\ &= \{\text{oberoende}\} \\ &= P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) \\ &= \frac{1^0}{0!}e^{-1} \cdot \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{1^2}{2!}e^{-1} \cdot \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{1^1}{1!}e^{-1} \cdot \frac{2^1}{1!}e^{-2} \\ &= e^{-1}e^{-2} \cdot (2 + \frac{1}{2} + 2) = \frac{9}{2}e^{-3} = 0.224 \end{aligned}$$

**Svar:** 0.224

### Uppgift 3

Vi har att fördelningsfunktionen för  $X$  ges av

$$F_X(x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0, \\ 1 - \frac{(20-x)^2}{400} & \text{om } 0 \leq x \leq 20, \\ 1 & \text{om } x > 20. \end{cases}$$

Genom att derivera får vi täthetsfunktionen för  $X$  som

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{20-x}{200} & \text{om } 0 \leq x \leq 20, \\ 0 & \text{om } x < 0 \text{ eller } x > 20. \end{cases}$$

Detta ger

$$E(X) = \int_0^{20} \frac{x(20-x)}{200} dx = \frac{20}{200} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{20} - \frac{1}{200} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{20} = 20 - \frac{2}{3} \cdot 20 = 6.667$$

**Svar:** 6.667

#### Uppgift 4

Låt  $X$  beteckna antalet krona som kommer upp i två kast med ett symmetriskt mynt. Då gäller att  $X \in \text{Bin}(2, 0.5)$  och vi får att

$$p_X(2) = \binom{2}{2} 0.5^2 \cdot 0.5^0 = 0.25.$$

Således gäller om  $A_i$  betecknar händelsen att person  $i$  får två krona att  $P(A_i) = 0.25$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Således har vi att

$$P(\text{minst en av fem får två krona}) = 1 - P(\text{ingen får krona}) = \{\text{oberoende}\} = 1 - 0.75^5 = 0.7627$$

eller mer matematiskt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^5 A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^5 A_i^*\right) = \{\text{oberoende}\} = 1 - \prod_{i=1}^5 P(A_i^*) = 1 - 0.75^5 = 0.7627.$$

**Svar:** 0.7627

#### Uppgift 5

$$V(2X + Y - Z) = V(2X) + V(Y - Z) + 2C(2X, Y - Z) = [X \text{ är obero av } Y \text{ och } Z] = V(2X) + V(Y - Z) = 4 \cdot V(X) + V(Y) + V(Z) - 2C(Y, Z) = 4 + 2 + 3 - 2 \cdot 2 = 5$$

**Svar:** 5