Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1910/SF1925 TILLÄMPAD STATISTIK,

ONSDAG 22 NOVEMBER 2023 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten.
För godkänt krävs att minst tre av fem uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

Antag att A, B är händelser så att $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$ och $P(A^\star \cup B^\star) = 0.7$. Beräkna $P(A^\star \cap B)$.

Uppgift 2

Risken att en fotgängare dör vid påkörning av en bil är 10% vid 30 km/h och 80% vid 50 km/h. Längs en gata i Stockholm har Polisen noterat att runt 95% av bilisterna håller hastighetsgränsen på 30 km/h medan resten kan antas köra i 50 km/h. Givet att en fotgängare avlidit i samband med påkörning på denna gata, vad är sannolikheten att bilen körde 50 km/h?

Uppgift 3

Låt X vara en diskret stokastisk variabel med sannolikhetsfunktion

$$p_X(k) = \begin{cases} (1-p)p^k, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

där $p = 0.6$. Beräkna $P(X \geq 3)$.

Uppgift 4

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Bestäm $P(X + Y \geq 1)$.

Uppgift 5

Den stokastiska variabeln X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad x < 2, \\ 0.5 & \text{om} \quad 2 \leq x < 4, \\ 0.8 & \text{om} \quad 4 \leq x < 8, \\ 1 & \text{om} \quad x \geq 8. \end{cases}$$

Bestäm standardavvikelsen $D\left(2X - 2\right)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

$$P\left(A^\star \cap B\right) = P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = P\left(B\right) - \left(1 - P\left(A^\star \cup B^\star\right)\right) = 0.7 - (1 - 0.7) = 0.4.$$

Uppgift 2

Låt A vara händelsen av ett dödsfall och B vara att bilen kör i 30 km/h.

$$P\left(B^\star \mid A\right) = \frac{P\left(A \mid B^\star\right) P\left(B^\star\right)}{P\left(A\right)} = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.1 \cdot 0.95 + 0.8 \cdot 0.05} = \frac{0.04}{0.135} \approx 0.296.$$

Uppgift 3

Enligt komplementsatsen har vi

$$\begin{aligned} P\left(X \geq 3\right) &= 1 - P\left(X \leq 2\right) = 1 - p_X(0) - p_X(1) - p_X(2) \\ &= 1 - (1-p)(1 + p + p^2) = 1 - 0.4(1 + 0.6 + 0.6^2) = 0.216. \end{aligned}$$

Uppgift 4

$$\begin{aligned} P(X + Y \geq 1) &= |\text{rita en graf}| = \int_0^1 dx \left(\int_{1-x}^1 3y^2 dy \right) = \\ &= \int_0^1 dx \left[y^3 \right]_{(1-x)}^1 = \int_0^1 dx - \int_0^1 (1-x)^3 dx = \\ &= 1 - \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75 \end{aligned}$$

Uppgift 5

Vi har att $F_X(x) = P(X \leq x) \Rightarrow p_X(2) = 0.5, p_X(4) = 0.3, p_X(8) = 0.2$

$E(X) = 2 \cdot p_X(2) + 4 \cdot p_X(4) + 8 \cdot p_X(8) = 2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 + 8 \cdot 0.2 = 3.8$

$E(X^2) = 2^2 \cdot p_X(2) + 4^2 \cdot p_X(4) + 8^2 \cdot p_X(8) = 4 \cdot 0.5 + 16 \cdot 0.3 + 64 \cdot 0.2 = 19.6$
$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 19.6 - 3.8^2 = 5.16$
$V(2X - 2) = V(2X) = 4V(X) = 20.64$
$D(2X - 2) = \sqrt{V(2X - 2)} = 4.543$