

Felanalys, Felkalkyl och Kondition

GNM kap 2

Motivation till felkalkyl och tillförlitlighetsbedömning

När vi använder våra numeriska metoder önskar vi såklart att resultatet blir riktigt. Tyvärr uppstår alltid flera olika typer av fel, till exempel avrundningsfelet vi såg i Lab A1. I vissa fall kan dessa fel få katastrofala följder. I denna kurs lär vi oss tekniker för att hantera olika typer av fel så att vi kan göra en bedömning av hur tillförlitligt resultatet är.

Det finns många exempel på katastrofer som har orsakats av att man inte gjort en korrekt felanalys när man använt en numerisk metod, eller att man har haft orealistiskt mycket förtroende i resultatet som beräknats.

- Oljeplattformen Sleipner sjönk utanför Norges kust 1991. Orsaken till olyckan var att man genomfört en ofullständig felanalys när man använde en numerisk metod (finitaelementmetoden).

<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/sleipner.html>

- Rymdraketen Ariane 5 exploderade 1996. Efter en lång utredning kom man fram till att felet berodde på att man i beräkningar använde tal som var för stora för att kunna representeras och det uppstod ett så kallat overflow (utsiktning)

<http://www.ima.umn.edu/~arnold/disasters/ariane.html>

- De flesta av er som läser samhällsbyggnadsprogrammet kommer stöta på tillförlitlighetsbedömning i senare kurser och även i arbetslivet. Till exempel är tillförlitlighetsbedömning extremt viktig i byggnadskonstruktion. I en Europeisk standard för byggnadskonstruktion och dimensionering http://sv.wikipedia.org/wiki/Dimensioneringskontroll_enligt_EKS är ett villkor *korrekt genomförda numeriska beräkningar*. Felaktig dimensioneringskontroll kan leda till att konstruktioner kollapsar <http://sv.wikipedia.org/wiki/Kistaraset>. (Kistaraset berodde dock inte på dålig felanalys i numeriska metoder.) Samhällsbyggnadsprogrammet ger er i årskurs 3 möjlighet att lära er mer om dimensioneringskontroll, till exempel i inriktningen *Husbyggnads- och anläggningsteknik (HBAT)*.

Definitioner

När vi jobbar med approximationer (även kallat närmevärde, skattning eller uppskattning) i samband med numeriska metoder använder vi följande begrepp.

- Absolutfel och relativfel är två typer av beskrivningar av ett fel

$$e_x = \tilde{x} - x = \text{absolutfel} \text{ och } r_x = (\tilde{x} - x)/x = \text{relativfel}$$

där $\tilde{x}$ är en approximation av x .

- Då ett exakt värde på felet oftast inte är tillgänglig arbetar vi ofta med felgränser. Vi säger att E_x och R_x är felgränser för absolutfel och relativfel och uppfyller

$$|e_x| \leq E_x \text{ och } |r_x| \leq R_x.$$

- Antal korrekta decimaler är det största heltal d så att $E_x = \frac{1}{2} \cdot 10^{-d}$. Antalet korrekta siffror är siffrorna $\tilde{x}$ till och med den sista korrekta decimalen, där inledande nollor ej räknas. (Se GNM 2.1C)

Felfortplantning

När vi genomför operationer som bygger på approximerade värden har resultatet också ett fel, och vi säger att felet förplantas.

- För några enkla operationer finns regler för hur man kan få fram felgränser på resultatet (GNM 2.2A) till exempel
 - Vid addition och subtraktion $z = x \pm y$: $E_z = E_x + E_y$
 - Vid multiplikation och division $R_z = R_x + R_y$.
- (Allmänna felfortplantningsformeln GNM sid 39) När resultatet bildas från ett mer komplicerat uttryck kan det vara lättare att använda felfortplantningsformeln: Om $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ och där $x_1, \dots, x_n$ har felgränser $E_1, \dots, E_n$ så uppskattar vi absolutfelet i f med

$$E_f \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| E_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| E_n$$

Avrundningsfel

Vi kan i regel inte representera tal (som inte är heltal) exakt på en dator. Varje operation leder till ett tal som är avrundat så det kan representeras.

- Kancellation (GNM 2.2C): Om vi subtraherar två *nästan lika stora tal* kan resultatet bli dåligt och vi kan ha "förlorat" många korrekta siffror. Detta går ibland att undvika genom att formulera om uttryck.
- Utskiftning (GNM 2.2D): Om ett tal subtraheras eller adderas med ett tal som är *mycket större* kan vi också förlora i noggrannhet.

Konditionstal

Som ett mått på hur känsligt ett värde är med avseende på fel i indata använder vi oss av begreppet kondition (GNM sid 34-35) och konditionstalet

$$\mathcal{K} = \frac{R_{ut}}{R_{in}}$$

Om konditionstalet är stort är problemet känsligt för störningar.

När vi löser linjära ekvationssystem har vi speciellt att konditionstalet är

$$\mathcal{K} = \|A\| \|A^{-1}\|$$

som i matlab kan beräknas med `cond(A)`. Se GNM sid 111.

Sekvenser av approximationer (noggrannhetsordning och konvergensordning)

- Om vi har en numerisk metod $F(h)$ innehåller en parameter $h \ll 1$ har metoden *noggrannhetsordning* p om

$$F(h) \approx ch^p.$$

Mer formell definition: DNM 2.3B-a.

- Om en numerisk metod innehåller en parameter N och N är ett (tillräckligt) stort heltal och metoden genererar en sekvens av approximationer $x_1, x_2, \dots, x_N$ säger vi att metoden har *konvergensordning* p om

$$x_n - x_* \approx K \cdot (x_{n-1} - x_*)^p.$$

Mer formell definition: GNM 2.3.B-b. "Tänk" Newton-Raphsons metod med konvergensordning $p = 2$.

Derivataskattning

När vi vill approximera derivator numeriskt använder vi oss ofta av en av följande differensformler som har olika noggrannhetsordning:

- Approximationen $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ kallas framåtdifferens och har noggrannhetsordning $p = 1$.
- Approximationen $f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ kallas bakåtdifferens och har noggrannhetsordning $p = 1$.
- Approximationen $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ kallas centraldifferens och har noggrannhetsordning $p = 2$.
- Approximationen $f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ har noggrannhetsordning $p = 2$.